ÜBER DIE RÜCKSTRAHLUNG EINER IN EINEM DIELEKTRISCHEN HALBRAUM IN DER NÄHE VON DESSEN OBERFLÄCHE EINGEBETTETEN UNENDLICH LEITENDEN KUGEL

INAUGURAL - DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von
Jean Wiedemann
Licencié-es-Sciences
aus Paris

Saarbrücken 1968

1969

ÜBER DIE RÜCKSTRAHLUNG EINER IN EINEM DIELEKTRISCHEN HALBRAUM IN DER NÄHE VON DESSEN OBERFLÄCHE EINGEBETTETEN UNENDLICH LEITENDEN KUGEL

INAUGURAL - DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von
Jean Wiedemann
Licencié-es-Sciences
aus Paris

Saarbrücken 1968

Eine unendlich leitende Kugel sei in einem oberhalb derselben eben begrenzten dielektrischen Halbraum eingebettet. Darüber befinde sich Luft. Aus dem oberen Halbraum falle eine ebene elektrische Welle ein; neben der Reflexion des dielektrischen Halbraumes ist im Luftraum eine Rückstrahlung der Kugel vorhanden. Die Richtungsabhängigkeit des Streuquerschnitts der Kugel bei fester Einfallsrichtung der primären Welle wird berechnet.

UNIV. LEIDEN BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung:
1 März 1969
Der Dekan: Prof. Dr. H.D. Dietze
Erster Berichterstatter:
Prof. Dr. G. Eckart
Zweiter Berichterstatter:
Prof. Dr. A. W. Maue

Inhalt

1 Übersicht und Problemstellung

2 Lösung einiger später benötigten Hilfsaufgaben

3 Reflexion von allgemeinen Kugelwellen an ebenen Trennflächen

4 Lösung des doppelten Übergangsproblems

5 Numerische Beispiele

I Problemstellung und Übersicht

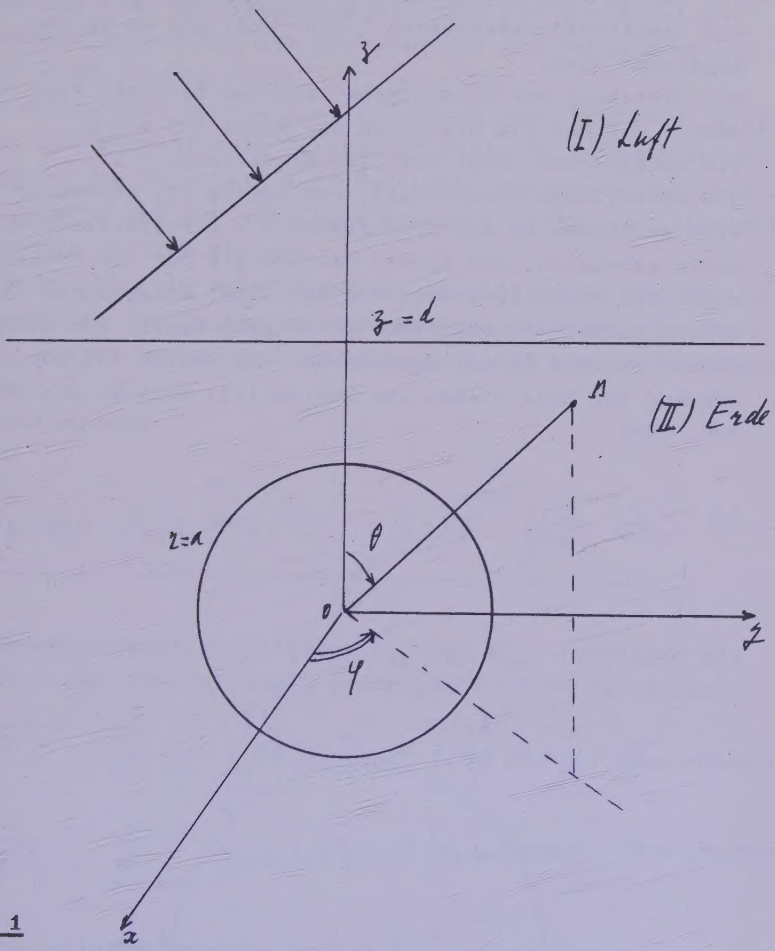


Abb. 1

Wir beziehen uns zum Verständnis auf Abb. 1.
Das Medium (I) sei die Luft, das Medium (II) die Erde.
In der Erde sei eine metallene Kugel eingebettet, dessen Zentrum O an der Entfernung d von der Erdoberfläche liege.

Vom Medium (I) her falle eine ebene Welle auf die ebene Trennfläche der Media (I) und (II) ein.
Gesucht wird der differentielle Streuquerschnitt der Anordnung in eine Richtung $\Delta(\theta, \varphi)$ die ins Medium (I) weist.

Lösungsweg des Problems

Wir führen ein cartesisches Koordinatensystem X,Y,Z und ein Kugelkoordinatensystem r, θ, φ ein, wie es in Abb. 1 angegeben wird.
Die Gleichung der Trennfläche zwischen Luft und Erde ist dann z = d und die Gleichung der Kugel ist r = a.
Wir analysieren jetzt kurz die Erscheinung.
Die einfallende ebene Welle, vom Medium (I) ankommend wird teilweise an der Trennfläche z = d reflektiert teilweise gebrochen. Der Anteil der Energie der ins Medium (II) eindringt, wird teilweise von der Kugel aufgefangen und wieder nach der Trennfläche z = d gespiegelt. Ein Bruchteil dieser Energie dringt dann wieder ins Medium (I) ein, während der Rest wieder ins Medium (II) reflektiert wird usw. usw.

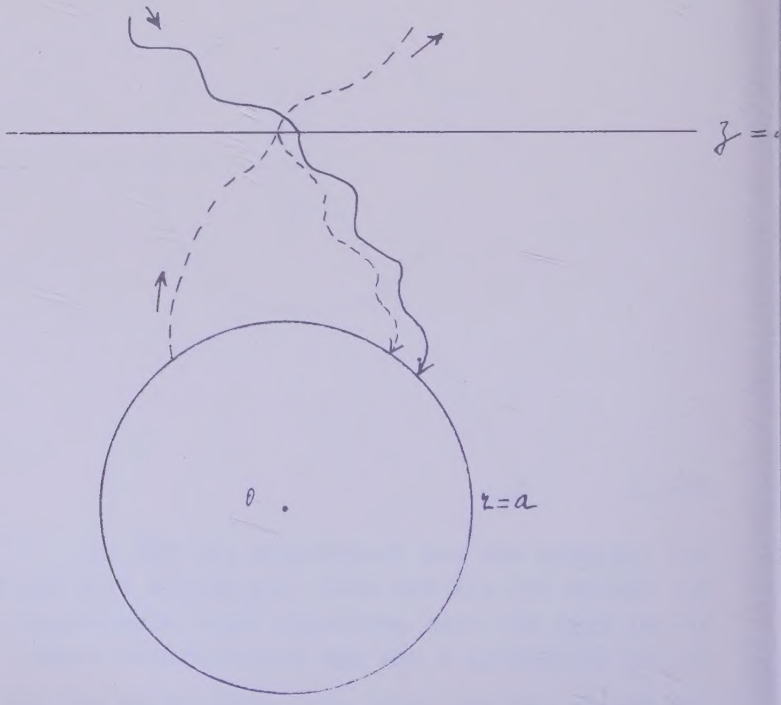


Abb. 2

In Abbildung 2 haben wir die primäre Erregung durchgezeichnet und die sekundäre gestrichelt.
Im Medium (II) unterscheiden wir: Ein von der Kugel herrührendes Streufeld, ein primäres und ein sekundäres auf die Kugel einfallendes Feld.
Alle diese drei Zustände sollen durch ihre radialen, elektrischen und magnetischen Hertzschen Vektoren gekennzeichnet werden. Das Streufeld soll der Ausstrahlungsbedingung genügen, die primäre und die sekundäre Erregung sollen am Koordinatenursprung endlich bleiben.
Wir schreiben die entsprechenden Entwicklungen der Hertzschen Vektoren an. Große Buchstaben beziehen sich auf das Streufeld, kleine Buchstaben beziehen sich auf die einfallenden Felder.
Wir definieren:

$$\Psi_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \qquad \eta_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

Mit Entwicklungskoeffizienten E_{nm} und E_{nm} schreiben wir zunächst das von der Kugel gestreute Feld in der Form:

1)
$$\begin{cases} \overrightarrow{\Pi^E_S} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta)\left[E_{nm}\cos m\varphi + \overline{E_{nm}}\sin m\varphi\right]\overrightarrow{OL} \\ \overrightarrow{\Pi^H_S} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta)\left[H_{nm}\cos m\varphi + \overline{H_{nm}}\sin m\varphi\right]\overrightarrow{OL} \end{cases}$$

Für die primäre Erregung machen wir den Ansatz:

2)
$$\begin{cases} \overrightarrow{\Pi^E_{el}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \psi_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta)\left[e_{nme}\cos m\varphi + \overline{e_{nme}}\sin m\varphi\right]\overrightarrow{OL} \\ \overrightarrow{\Pi^H_{el}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \psi_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta)\left[h_{nme}\cos m\varphi + \overline{h_{nme}}\sin m\varphi\right]\overrightarrow{OL} \end{cases}$$

und für das secundäre von der Trennfläche auf die Kugel reflektierte Feld den Ansatz:

$$(3)\quad \begin{cases} \overrightarrow{\Pi^E_{es}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \psi_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \left[e_{nms} \cos m\varphi + \overline{e_{nms}} \sin m\varphi \right] \overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{\Pi^H_{es}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \psi_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \left[h_{nms} \cos m\varphi + \overline{h_{nms}} \sin m\varphi \right] \overrightarrow{e_\varphi} \end{cases}$$

Zum Verständnis müssen wir zunächst einige zukünftige Ergebnisse vorwegnehmen:
Aufgrund der Grenzbedingungen die auf der Kugel zu befriedigen sind, sollen folgende Beziehungen gelten:

$$(4)\quad \frac{(e_{nms} + e_{nmc})}{E_{nm}} = \frac{(\overline{e_{nms}} + \overline{e_{nmc}})}{\overline{E_{nm}}} = a_n$$

$$(5)\quad \frac{h_{nms} + h_{nmc}}{H_{nm}} = \frac{\overline{h_{nms}} + \overline{h_{nmc}}}{\overline{H_{nm}}} = b_n$$

wobei a_n und b_n nur von n und nicht von m abhängen sollen.
Die Beziehungen (4) und (5) bedeuten physikalisch, daß die zu den einzelnen Gliedern der Entwicklungen (2) und (3) gehörigen Feldern unabhängig voneinander an der Kugel gebeugt werden. Zum Beispiel das E-Partialfeld:

$$(6)\quad \overrightarrow{\Pi_c^E} = \overrightarrow{\Pi^E_{es}} + \overrightarrow{\Pi^E_{ec}} = (e_{nms} + e_{nmc}) \psi_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \overrightarrow{e_r}$$

wird unabhängig von den anderen Partial Feldern in

$$(7)\quad \overrightarrow{\Pi_s^E} = \frac{(e_{nms} + e_{nmc})}{a_n} \psi_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \overrightarrow{e_r}$$

gebeugt.
Das schwierigste Problem besteht jetzt darin die Beziehung

zwischen Streufeld und sekundärer Erregung herzustellen. Dazu müssen wir ein Hilfsproblem lösen: An der Stelle der Kugel, legen wir eine Quelle die ebenfalls durch ihren elektrischen (oder magnetischen) Vektor gekennzeichnet ist:

$$(8)\qquad \overrightarrow{\pi^{E}_{S}} \text{ oder } \overrightarrow{\pi^{H}_{S}} = \eta_r(kr)\, P_r^{\mu}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \mu\varphi \; \overrightarrow{e_{rr}}$$

Die von dieser Quelle abgestrahlte Energie wird teilweise an der Trennfläche der Media (I) und (II) wieder in das Medium (II) reflektiert, es handelt sich darum, diesen Zustand durch die Reihenentwicklungen seiner Hertzschen Vektoren zu erfassen unter Vorwegnahme zukünftiger Ergebnisse ergibt sich Folgendes:

$$\overrightarrow{\pi^{E}_{S}} = \eta_r(kr)\, P_r^{\mu}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \mu\varphi \; \overrightarrow{e_{rr}}$$

wird reflektiert in:

$$(9)\qquad \begin{cases} \overrightarrow{\pi^{E}_{eS}} = \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} \alpha_{\lambda}^{r\mu} \psi_{\lambda}(kr)\, P_{\lambda}^{\mu}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \mu\varphi \; \overrightarrow{e_{rr}} \\ \overrightarrow{\pi^{H}_{eS}} = \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} \beta_{\lambda}^{r\mu} \psi_{\lambda}(kr)\, P_{\lambda}^{\mu}(\cos\theta) \begin{matrix}-\sin\\ \cos\end{matrix} \mu\varphi \; \overrightarrow{e_{rr}} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\pi^{H}_{S}} = \eta_r(kr)\, P_r^{\mu}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \mu\varphi \; \overrightarrow{e_{rr}}$$

wird reflektiert in:

$$(10)\qquad \begin{cases} \overrightarrow{\pi^{E}_{eS}} = \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} \gamma_{\lambda}^{r\mu} \psi_{\lambda}(kr)\, P_{\lambda}^{\mu}(\cos\theta) \begin{matrix}-\sin\\ \cos\end{matrix} \mu\varphi \; \overrightarrow{e_{rr}} \\ \overrightarrow{\pi^{H}_{eS}} = \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} \delta_{\lambda}^{r\mu} \psi_{\lambda}(kr)\, P_{\lambda}^{\mu}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \mu\varphi \; \overrightarrow{e_{rr}} \end{cases}$$

Die Gleichungen (4), (5), (9), (10) zeigen, daß es zu jedem m zwei unabhängige Partialfelder gibt (einem Partialfeld ent-

spricht ein einfallendes und ein gestreutes Feld) nämlich:

(11)

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \sum_{\nu=m}^{\infty} E_{\nu m}\, \eta_\nu(kr)\, P_\nu^m(\cos\theta) \cos m\varphi\, \overrightarrow{ch}$$

mit $$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} + \overrightarrow{\Pi_{ee}^E} = \sum_{\nu=m}^{\infty} (e_{\nu ms} + e_{\nu me})\, \psi_\nu(kr)\, P_\nu^m(\cos\theta) \cos m\varphi\, \overrightarrow{ch}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = \sum_{\nu=m}^{\infty} \overline{H_{\nu m}}\, \eta_\nu(kr)\, P_\nu^m(\cos\theta) \sin m\varphi\, \overrightarrow{ch}$$

mit $$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} + \overrightarrow{\Pi_{ee}^H} = \sum_{\nu=m}^{\infty} (-\overline{h_{\nu ms}} + \overline{h_{\nu me}})\, \psi_\nu(kr)\, P_\nu^m(\cos\theta) \sin m\varphi\, \overrightarrow{ch}$$

einerseits

(12)

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \sum_{\nu=m}^{\infty} \overline{E_{\nu m}}\, \eta_\nu(kr)\, P_\nu^m(\cos\theta) \sin m\varphi\, \overrightarrow{ch}$$

mit $$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} + \overrightarrow{\Pi_{ee}^E} = \sum_{\nu=m}^{\infty} (\overline{e_{\nu ms}} + \overline{e_{\nu me}})\, \psi_\nu(kr)\, P_\nu^m(\cos\theta) \sin m\varphi\, \overrightarrow{ch}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = \sum_{\nu=m}^{\infty} H_{\nu m}\, \eta_\nu(kr)\, P_\nu^m(\cos\theta) \cos m\varphi\, \overrightarrow{ch}$$

mit $$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} + \overrightarrow{\Pi_{ee}^H} = \sum_{\nu=m}^{\infty} (h_{\nu ms} + h_{\nu me})\, \psi_\nu(kr)\, P_\nu^m(\cos\theta) \cos m\varphi\, \overrightarrow{ch}$$

andererseits, wobei die Beziehungen (4) und (5) zu berücksichtigen sind.

Schließlich könnten wir die Grundansätze (1), (2), (3) ganz anders gestalten indem wir die Summation nach m voranstellen; um Platz zu sparen schreiben wir dies nur schematisch:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (12) \quad \text{und} \quad \sum_{m=0}^{\infty} (11) \quad ,$$

wobei an der Stelle von (12) und (11) die oben angegebenen Ausdrücke geschrieben sein sollen. Jetzt hat man die Partialfelder wie (11) oder (12) einzeln auszurechnen.

Wir lassen den Koeffizienten m weg, da er ungeändert bleibt für ein bestimmtes Partialfeld; die Folge der Koeffizienten ist hypothesengemäß bekannt, da sie der primären Erregung entspricht:

also $\overline{e_{mP}}$ $\overline{e_{m+1P}}$ $\overline{e_{m+2P}}$ ....

und

h_{mP} h_{m+1P} h_{m+2P} .... sind bekannt.

Wir wählen als Unbekannte unseres Problems die zwei unendlichen Folgen von Koeffizienten:

$$\overline{E_m} \quad \overline{E_{m+1}} \quad \overline{E_{m+2}} \ \ldots\ldots\ldots$$

$$H_m \quad H_{m+1} \quad H_{m+2} \ \ldots\ldots\ldots$$

dann ist es möglich, insofern man sich für sie interessiert, die Koeffizienten der sekundären Erregung mittels der Beziehungen (4) und (5) auszurechnen.
Wir zeigen nun, daß die Koeffizienten $\overline{E_{m+1}}$ und H_{m+1} Lösungen eines Systems von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten sind.
Wir führen folgende Vektoren ein:

$$\tilde{E} = \left[\overline{E_m} \quad \overline{E_{m+1}} \quad \overline{E_{m+2}} \ \ldots\ldots\right.$$

$$\tilde{H} = \left[H_m \quad H_{m+1} \quad H_{m+2} \ \ldots\ldots\right.$$

$$\tilde{e}_P = \left[\overline{e_{mP}} \quad \overline{e_{m+1P}} \quad \overline{e_{m+2P}} \ \ldots\ldots\right.$$

$$\tilde{e}_S = \left[\overline{e_{mS}} \quad \overline{e_{m+1S}} \quad \overline{e_{m+2S}} \ \ldots\ldots\right.$$

$$\tilde{h}_P = \left[h_{mP} \quad h_{m+1P} \quad h_{m+2P} \ \ldots\ldots\right.$$

$$\tilde{h}_S = \left[h_{mS} \quad h_{m+1S} \quad h_{m+2S} \ \ldots\ldots\right.$$

Diese"Vektoren" sind nicht physikalischer Natur; wir schreiben die unendliche Folge der Koeffizienten als unendlich dimensionale Vektoren im Sinne von Hilbert. Und wir führen ebenfalls die folgenden unendlichen Matrizen ein, deren Koeffizienten sich aus (9) und (1o) ergeben.

$$\alpha \overset{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} \alpha_m^m & \alpha_{m+1}^m & \alpha_{m+2}^m & \cdots \\ \alpha_m^{m+1} & \alpha_{m+1}^{m+1} & \alpha_{m+2}^{m+1} & \cdots \\ \alpha_m^{m+2} & \alpha_{m+1}^{m+2} & \alpha_{m+2}^{m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

$$\beta \overset{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} \beta_m^m & \beta_{m+1}^m & \beta_{m+2}^m & \cdots \\ \beta_m^{m+1} & \beta_{m+1}^{m+1} & \beta_{m+2}^{m+1} & \cdots \\ \beta_m^{m+2} & \beta_{m+1}^{m+2} & \beta_{m+2}^{m+2} & \cdots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

$$\gamma \overset{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} \gamma_m^m & \gamma_{m+1}^m & \gamma_{m+2}^m & \cdots \\ \gamma_m^{m+1} & \gamma_{m+1}^{m+1} & \gamma_{m+2}^{m+1} & \cdots \\ \gamma_m^{m+2} & \gamma_{m+1}^{m+2} & \gamma_{m+2}^{m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

$$\delta \overset{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} \delta_m^m & \delta_{m+1}^m & \delta_{m+2}^m & \cdots \\ \delta_m^{m+1} & \delta_{m+1}^{m+1} & \delta_{m+2}^{m+1} & \cdots \\ \delta_m^{m+2} & \delta_{m+1}^{m+2} & \delta_{m+2}^{m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Bei diesen Koeffizienten wurde der dritte Index = m weggelassen. Wir führen dann die Diagonalmatrizen ein, deren Elemente von (5) und (4) gegeben sind:

$$\underline{\underline{A}}^{\mathrm{Def}} = \begin{vmatrix} a_m & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{m+1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}^{\mathrm{Def}} = \begin{vmatrix} b_m & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_{m+1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_{m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Die Beugung an der Kugel ergibt dann:

$$\tilde{e}_e + \tilde{e}_s = \tilde{E}\,A$$
$$\tilde{h}_e + \tilde{h}_s = \tilde{H}\,B$$

Die Reflexion an der Trennfläche z = d liefert:

$$\tilde{e}_s = \tilde{E}\,\alpha - \tilde{H}\,\gamma$$
$$\tilde{h}_s = \tilde{E}\,\beta + \tilde{H}\,\delta$$

Die Elimination von $\tilde{e}_s$ und $\tilde{h}_s$ gibt:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \tilde{E}(A-\alpha) + \tilde{H}\gamma &= \tilde{e}_e \\ -\tilde{E}\beta + \tilde{H}(B-\delta) &= \tilde{h}_e \end{aligned}$$

Es handelt sich hier also um ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten geschrieben in Matrizenschreibweise.
So wäre, theoretisch mindestens, der Fall der Partialwelle (12) erledigt. Was die Partialwelle (11) betrifft, so ergibt sich auf ganz analoge Weise:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \tilde{E}(A-\alpha) - \tilde{H}\gamma &= \tilde{e}_e \\ \tilde{E}\beta + \tilde{H}(B-\delta) &= \tilde{h}_e \end{aligned}$$

Endlich soll man nicht vergessen, daß die Gleichungen (13) und (14) nur für ein bestimmtes m gelten:
Man soll also diese Gleichungen lösen für jedes m variierend von 0 bis ∞. Erst dann kennt man die Koeffizienten E_{nm} $\overline{E_{nm}}$ H_{nm} $\overline{H_{nm}}$ für jedes Paar (n,m) mit $n \geq m$ und kennt dann infolgedessen die Strahlung der Kugel.
Nach diesen Vorbereitungen können wir uns dem eigentlichen Ziel der Arbeit zuwenden: Der Berechnung des Streuquerschnittes der Anordnung. Auf Grund der vorliegenden Übersicht ergibt sich nun die folgende Aufgliederung der Untersuchung:

I Vorbereitende Untersuchungen: Dieser Teil enthält die Lösung verschiedener Hilfsaufgaben. Zum Verständnis der Arbeit ist die Lektüre dieses Abschnittes nicht notwendig.

II Dieser Abschnitt zerfällt in 2 Teile:
A Berechnung der Koeffizienten α_λ^{rh}, β_λ^{rh}, γ_λ^{rh}, δ_λ^{rh}

die in den Gleichungen (9) und (10) auftreten sowie der Koeffizienten a_n und b_n der Gleichungen (4) und (5).

B Lösung der Gleichungen (13) und (14) auf Grund der Kenntnis der Matrizen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A$ und B

III Sodann wird der Streuquerschnitt der Anordnung in einer bestimmten Richtung und für eine bestimmte primäre Erregung ausgerechnet. Und zwar unter Benutzung der Koeffizienten

$$E_{x,m} \quad \overline{E_{x,m}} \quad H_{x,m} \quad \overline{H_{x,m}}$$

IV Nach dem Vorliegen der mathematischen Lösung erfolgt die numerische Auswertung der Ergebnisse für 2 verschiedene primäre Erregungen.

II Lösung einiger Hilfsaufgaben.

§ 1 In diesem Paragraphen wird

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}$$

mit dem speziellen Fall m = o ermittelt.

$$\eta_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

wir setzen:

$$X = \frac{\partial}{\partial x}\, \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi$$

aber:

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \sin\theta\cos\varphi\, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\, \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\, \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$X = \frac{d}{dr}\, \eta_n(kr) \sin\theta\, P_n^m(\cos\theta) \cos\varphi \cos m\varphi$$

$$+ \frac{\eta_n(kr)}{r} \cos\theta\, \frac{d}{d\theta}\, P_n^m(\cos\theta) \cos\varphi \cos m\varphi$$

$$- \frac{\eta_n(kr)}{r\sin\theta}\, P_n^m(\cos\theta) \sin\varphi\, \frac{d}{d\varphi} \cos m\varphi$$

Sommerfeld Bd. VI, S. 9o Formeln (51) und (52) nach kurzen Umrechnungen gibt:

$$(2n+1)\, \frac{d\,\eta_n(kr)}{dr} = k\left[n\, \eta_{n-1}(kr) - (n+1)\, \eta_{n+1}(kr)\right]$$

$$\frac{\eta_n(kr)}{r} = \frac{k}{2n+1}\left(\eta_{n+1}(kr) - \eta_{n-1}(kr)\right)$$

$$2\cos\varphi\cos m\varphi = \cos(m+1)\varphi + \cos(m-1)\varphi$$

$$2\sin\varphi\sin m\varphi = \cos(m-1)\varphi - \cos(m+1)\varphi$$

Und nach kurzer Umordnung:

$$X = \frac{k}{2n+1}\left[n\,\eta_{n-2}(kr) - (n+2)\,\eta_{n+1}(kr)\right]\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta)\,\frac{1}{2}\left[\cos(m+1)\varphi + \cos(m-1)\varphi\right]$$

$$+ \frac{k}{2n+1}\left[\eta_{n+1}(kr) + \eta_{n-1}(kr)\right]\cos\theta\,\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)\,\frac{1}{2}\left[\cos(m+1)\varphi + \cos(m-1)\varphi\right]$$

$$+ \frac{k}{2n+1}\left[\eta_{n+1}(kr) + \eta_{n-1}(kr)\right]\frac{m}{2}\,\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left[\cos(m-1)\varphi - \cos(m+1)\varphi\right]$$

$$X = \eta_{n-1}(kr)\cos(m-1)\varphi\,\frac{k}{2(2n+1)}\left[n\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta) + \cos\theta\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta) + \frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\right]$$

$$+ \eta_{n-1}(kr)\cos(m+1)\varphi\,\frac{k}{2(2n+1)}\left[n\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta) + \cos\theta\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta) - \frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\right]$$

$$+ \eta_{n+1}(kr)\cos(m-1)\varphi\,\frac{k}{2(2n+1)}\left[-(n+1)\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta) + \cos\theta\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta) + \frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\right]$$

$$+ \eta_{n+1}(kr)\cos(m+1)\varphi\,\frac{k}{2(2n+1)}\left[-(n+1)\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta) + \cos\theta\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta) - \frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\right]$$

Es handelt sich jetzt darum, die in der Klammer stehenden Ausdrücke umzuwandeln.
Lense S. 17 gibt Formeln, die nach leichten Umrechnungen vorerst zwei Ausdrücke liefern:

$$n\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta) + \cos\theta\,\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta) - \frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta) = P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta)$$

$$-(n+1)\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta) + \cos\theta\,\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta) - \frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta) = P_{n+1}^{m+1}(\cos\theta)$$

Es bleiben die zwei anderen Klammern. Anscheinend gibt es in der Literatur dafür keine entsprechenden Formeln. Wir machen also den folgenden Ansatz:

$$n \sin\theta\, P_n^m(\cos\theta) + \cos\theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) + \frac{m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) = A_{mn} P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)$$

$$-(n+1)\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta) + \cos\theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) + \frac{m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) = B_{mn} P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)$$

Diese Rechnungen führen auf:

$$A_{mn} = -(n+m)/(n+m-1)$$

$$B_{mn} = -(n-m+1)/(n-m+2)$$

für m = o hat man speziell

$$n \sin\theta\, P_n(\cos\theta) + \cos\theta \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) = P_{n-1}'(\cos\theta)$$

$$-(n+1)\sin\theta\, P_n(\cos\theta) + \cos\theta \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) = P_{n+1}'(\cos\theta)$$

schließlich:

(15)

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi$$

$$= \frac{K}{2(2n+1)} \left\{ \begin{array}{l} -(n+m)(n+m-1)\,\eta_{n-1}(kr)\, P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta)\cos(m-1)\varphi \\ +\eta_{n-1}(kr) P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)\cos(m+1)\varphi - \eta_{n+1}(kr) P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)\cos(m+1)\varphi \\ -(n-m+1)(n-m+2)\,\eta_{n+1}(kr)\, P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)\cos(m-1)\varphi \end{array} \right\}$$

Analog erhalten wir:

(16)

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \sin m\varphi$$

$$= \frac{k}{2(2n+1)} \left\{ \begin{array}{l} -(n+m)(n+m-1)\,\eta_{n-1}(kr)\, P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta)\sin(m-1)\varphi \\ \eta_{n-1}(kr) P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta)\sin(m+1)\varphi + \eta_{n+1}(kr) P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)\sin(m+1)\varphi \\ -(n-m+1)(n-m+2)\,\eta_{n+1}(kr)\, P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)\sin(m-1)\varphi \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\eta_n(kr)\,P_n^m(\cos\theta)\,\sin m\varphi =$$

$$\frac{k}{2(2n+1)}\Big\{(n+m)(n+m-1)\,\eta_{n-1}(kr)\,P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta)\sin(m-1)\varphi$$

$$+\,\eta_{n-1}(kr)\,P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta)\sin(m+1)\varphi+\eta_{n+1}(kr)\,P_{n+1}^{m+1}(\cos\theta)\sin(m+1)\varphi$$

$$-\,(n-m+1)(n-m+2)\,\eta_{n+1}(kr)\,P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)\sin(m-1)\varphi\Big\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\eta_n(kr)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi =$$

$$\frac{k}{2(2n+1)}\Big\{(n+m)(n+m-1)\,\eta_{n-1}(kr)\,P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta)\sin(m-1)\varphi$$

$$\eta_{n-1}(kr)\,P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta)\sin(m+1)\varphi+\eta_{n+1}(kr)\,P_{n+1}^{m+1}\sin(m+1)\varphi$$

$$(n-m+1)(n-m+2)\,\eta_{n+1}(kr)\,P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)\sin(m-1)\varphi\Big\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\eta_n(kr)\,P_n^m(\cos\theta)\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,m\varphi$$

$$=\frac{K}{2(2n+1)}\Big\{(n+m)\,\eta_{n-1}(kr)\,P_{n-1}^m(\cos\theta)\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,m\varphi+(n-n-1)\,\eta_{n+1}(kr)\,P_{n+1}^m(\cos\theta)\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,m\varphi\Big\}$$

§ 2 Der Zweck dieses Paragraphen besteht darin für die Vektoren

$$\vec{A} = \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi \; \vec{\alpha}$$

$$\vec{a} = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu \eta_\nu(kr)\, P_\nu^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi \; \vec{\alpha}$$

die Ausdrücke $\mathrm{rot}_x, \mathrm{rot}_y, \mathrm{rot}_z, \frac{\vec{A}}{\vec{a}}$ zu ermitteln.

Wir erhalten:

$$\mathrm{rot}_x \frac{\vec{A}}{\vec{a}} = \left[y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right] \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi$$

$$\mathrm{rot}_y \vec{A} = \left[x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x} \right] \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi$$

$$\mathrm{rot}_z \vec{A} = \left[y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \right] \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi$$

aber:

$$y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \equiv \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x} \equiv -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \equiv -\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

andererseits:

$$\sin\varphi\cos m\varphi = \frac{1}{2}\left[\sin(m+1)\varphi - \sin(m-1)\varphi \right]$$

$$\sin m\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\left[\sin(m+1)\varphi + \sin(m-1)\varphi \right]$$

leichte Rechnungen die auf der Definition der zugeordneten Legendreschen Polynome und ihre Differentialgleichungen beruhen, zeigen, daß

$$\frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) - m \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) = P_n^{m+1}(\cos\theta)$$

und $$\frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) + m \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) = \left[n(n-1) - n(n+1) \right] P_n^{m-1}(\cos\theta)$$

Elementare Rechnungen führen dann zu:

(20)
$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}_x \psi_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi \; \vec{e}_x = \\ &-\frac{1}{2} \psi_n(kr)\, P_n^{m+1}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} (m+1)\varphi \\ &+\frac{1}{2} \left[n(n-1) - n(n+1) \right] \psi_n(kr)\, P_n^{m-1}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} (m-1)\varphi \end{aligned}$$

(21)
$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}_y \psi_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi \; \vec{e}_y = \\ &-\frac{1}{2} \psi_n(kr)\, P_n^{m+1}(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (m+1)\varphi \\ &-\frac{1}{2} \left[n(n-1) - n(n+1) \right] \psi_n(kr)\, P_n^{m-1}(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (m-1)\varphi \end{aligned}$$

(22)
$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}_z \psi_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi \; \vec{e}_z \\ &= m\, \psi_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} m\varphi \end{aligned}$$

Aus den Formeln (20) (21) (22) folgert man unmittelbar:

(23)

$$\vec{a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu}\, \eta_\nu(kr)\, P_\nu^\mu(\cos\theta)\, \sin\mu\varphi\, \vec{e_\theta}$$

$$\mathrm{rot}_x \vec{a} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \eta_\nu(kr)\, P_\nu^\mu(\cos\theta)\, \cos\mu\varphi \left[a_{\nu,\mu+1} \tfrac{1}{2} \left(\mu(\mu+1) - \nu(\nu+1) \right) - \tfrac{1}{2} a_{\nu\mu-1} \right]$$

$$\mathrm{rot}_y \vec{a} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \eta_\nu(kr)\, P_\nu^\mu(\cos\theta)\, \sin\mu\varphi \left[a_{\nu,\mu+1} \tfrac{1}{2} \left(\mu(\mu+1) - \nu(\nu+1) \right) + \tfrac{1}{2} a_{\nu\mu-1} \right]$$

$$\mathrm{rot}_z \vec{a} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu\, a_{\nu\mu}\, \eta_\nu(kr)\, P_\nu^\mu(\cos\theta)\, \cos\mu\varphi$$

(24)

$$\vec{b} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{\nu\mu}\, \eta_\nu(kr)\, P_\nu^\mu(\cos\theta)\, \cos\mu\varphi\, \vec{e_\theta}$$

$$\mathrm{rot}_x \vec{b} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \eta_\nu(kr)\, P_\nu^\mu(\cos\theta)\, \sin\mu\varphi \left[\tfrac{1}{2} \left(a_{\nu\mu-1} + (a_{\nu,0}) \right) - \tfrac{1}{2} a_{\nu,\mu+1} \left(\mu(\mu+1) - \nu(\nu+1) \right) \right]$$

$$\mathrm{rot}_y \vec{b} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \eta_\nu(kr)\, P_\nu^\mu(\cos\theta)\, \cos\mu\varphi \left[\tfrac{1}{2} \left(a_{\nu,\mu-1} + (a_{\nu,0}) \right) + \tfrac{1}{2} a_{\nu,\mu+1} \left(\mu(\mu+1) - \nu(\nu+1) \right) \right]$$

$$\mathrm{rot}_z \vec{b} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} b_{\nu\mu}\, \mu\, \eta_\nu(kr)\, P_\nu^\mu(\cos\theta)\, \sin\mu\varphi$$

Dabei gilt für die Klammern [$a_{\nu,\mu-1} + (a_{\nu,0})$] die Festlegung:

$$\left[a_{\nu,\mu-1} + (a_{\nu,0}) \right] = \begin{cases} 2a_{\nu 0} & \text{Wenn } \mu = 1 \\ a_{\nu\mu-1} & \text{Wenn } \mu \neq 1 \end{cases}$$

§ 3 Der Zweck dieses Paragraphen besteht darin, aus

$$A = \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta)\, \frac{\sin}{\cos} m\varphi$$

$$a = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{r\mu}\, \eta_r(kr)\, P_r^{\mu}(\cos\theta)\, \frac{\sin}{\cos}\mu\varphi$$

$$\vec{X} = K^2 A\,\vec{0M} + \operatorname{Grad}\frac{\partial}{\partial r}(rA)$$

$$\vec{Y} = K^2 a\,\vec{0M} + \operatorname{Grad}\frac{\partial}{\partial r}(ra)$$

die Größen $X_r, X_\vartheta, X_\varphi; Y_r, Y_\vartheta, Y_\varphi$ zu ermitteln.
Wir beginnen mit

$$A = \eta_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta)\, \cos m\varphi$$

und suchen vorerst die Komponenten von

$$\vec{X} = K^2 A\,\vec{0M} + \overrightarrow{\operatorname{Grad}}\frac{\partial}{\partial r}(rA)$$

vorab merken wir uns die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) = K^2 r A\left(\frac{n(n+1)}{K^2 r^2} - 1\right)$$

und suchen die Zwischengrößen:

$$X_r = K^2 r A + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) = \frac{n(n+1)}{r} A$$

$$X_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}(rA) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A + r\frac{\partial A}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r}\right)$$

$$X_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A + r\frac{\partial A}{\partial r}\right) = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r}\right)$$

Auf Grund der Beziehungen

$$(2n+1)\,\frac{d\,\eta_n(kr)}{dr} = K\left[n\,\eta_{n+1}(kr) - (n+1)\,\eta_{n-1}(kr)\right]$$

$$\frac{\eta_n(kr)}{r} = \frac{K}{2n+1}\left[\eta_{n+1}(kr) - \eta_{n-1}(kr)\right]$$

die im Paragraphen 1 angegeben wurden, gilt:

$$\frac{A}{r} = \frac{K}{2n+1}\left(\eta_{n+1}(kr) + \eta_{n-1}(kr)\right) P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{K}{2n+1}\left(n\,\eta_{n-1}(kr) - (n+1)\,\eta_{n+1}(kr)\right) P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

$$\frac{A}{2} + \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{K}{2n+1}\left[-n\,\eta_{n+1}(kr) + (n+1)\,\eta_{n-1}(kr)\right] P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

$$X_r = \frac{Kn(n+1)}{2n+1}\left[\eta_{n+1}(kr) + \eta_{n-1}(kr)\right] P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

$$X_\theta = \frac{K}{2n+1}\left[(n+1)\,\eta_{n-1}(kr) - n\,\eta_{n+1}(kr)\right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\cos m\varphi$$

$$X_\varphi = \frac{Km}{2n+1}\left[n\,\eta_{n+1}(kr) - (n+1)\,\eta_{n-1}(kr)\right] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin m\varphi$$

Der Übergang zu kartesischen Koordinaten liefert:

$$X_x = \frac{Kn(n+1)}{2n+1}\left[\eta_{n+1}(kr) + \eta_{n-1}(kr)\right] P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \sin\theta\cos\varphi$$

$$+ \frac{K}{2n+1}\left[-n\,\eta_{n+1}(kr) + (n+2)\,\eta_{n-1}(kr)\right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\cos m\varphi\cos\theta\cos\varphi$$

$$\frac{K}{2n+1}\left[-n\,\eta_{n+1}(kr) + (n+3)\,\eta_{n-1}(kr)\right] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\, m \sin m\varphi \sin\varphi$$

$$X_x = \frac{Kn(n+1)}{2n+1}\left[\eta_{n+1}(kr) + \eta_{n-1}(kr)\right] \sin\theta\, P_n^m(\cos\theta)\,\frac{1}{2}\left[\cos(m+1)\varphi + \cos(m-1)\varphi\right]$$

$$+ \frac{K}{2n+1}\left[-n\,\eta_{n+1}(kr) + (n+1)\,\eta_{n-1}(kr)\right] \cos\theta\, \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\,\frac{1}{2}\left[\cos(m+1)\varphi + \cos(m-1)\varphi\right]$$

$$+ \frac{K}{2n+1}\left[-n\,\eta_{n+1}(kr) + (n+2)\,\eta_{n-1}(kr)\right] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\,\frac{m}{2}\left[\cos(m-1)\varphi - \cos(m+1)\varphi\right]$$

$$X_x = \frac{K}{2(2n+1)} \left\{ \eta_{n+1}(kr) \cos(m+1)\varphi \left[n(n+2)\sin\theta P_n^m(\cos\theta) - n\cos\theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) + \frac{nm P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \right] \right.$$

$$+ \frac{K}{2(2n+1)} \left\{ \eta_{n+1}(kr) \cos(m-1)\varphi \left[n(n+2)\sin\theta P_n^m(\cos\theta) - n\cos\theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) + \frac{nm P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \right] \right\}$$

$$+ \frac{K}{2(2n+1)} \left\{ \eta_{n-1}(kr) \cos(m+1)\varphi \left[n(n+1)\sin\theta P_n^m(\cos\theta) + (n+1)\cos\theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) - (n+1)m \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \right] \right\}$$

$$+ \frac{K}{2(2n+1)} \left\{ \eta_{n-1}(kr) \cos(m-1)\varphi \left[n(n+1)\sin\theta P_n^m(\cos\theta) + (n+1)\cos\theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) + (n+1)m \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \right] \right\}$$

Die Werte der eckigen Klammern wurden in § 1 ausgerechnet.
Es ergibt sich schließlich:

$$\vec{X} = K^2 A \vec{OM} + \overrightarrow{\text{Grad}} \frac{\partial}{\partial r}(rA) \quad \text{mit } A = \eta_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi$$

$$X_x = \frac{Kn}{2(2n+1)}(n-m+1)(n-m+2)\eta_{n+1} P_{n+1}^{m-1} \cos(m-1)\varphi - \frac{Kn}{2(2n+1)} \eta_{n+1} P_{n+1}^{m+1} \cos(m+1)\varphi$$

$$- \frac{K(n+1)}{2(2n+1)}(n+n)(n+n-2)\eta_{n-1} P_{n-1}^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \frac{K(n+2)}{2(2n+2)} \eta_{n-1} P_{n-1}^{m+1} \cos(m+1)\varphi$$

$$X_y = \frac{Kn}{2(2n+1)}(n-m+1)(n-m+2)\eta_{n+1} P_{n+1}^{m-1} \sin(1-m)\varphi - \frac{Kn}{2(2n+1)} \eta_{n+1} P_{n+1}^{m+1} \sin(m+1)\varphi$$

$$- \frac{K(n+1)}{2(2n+1)}(m+n)(m+n-2)\eta_{n-1} P_{n-1}^{m-1} \sin(1-m)\varphi + \frac{K(n+1)}{2(2n+1)} \eta_{n-1} P_{n-1}^{m+1} \sin(m+1)\varphi$$

$$X_z = \frac{Kn(n+1-m)}{2n+1} \eta_{n+1} P_{n+1}^{m} \cos m\varphi$$

$$+ \frac{K(n+1)(m+n)}{2n+1} \eta_{n-1} P_{n-1}^{m} \cos m\varphi$$

Ganz analoge Rechnungen liefern:

$$\overrightarrow{Y} = K^2 B \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Grad} \frac{\partial}{\partial r}(rB) \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{B} = \eta_n P_n^m \sin m\varphi$$

(26)

$$Y_x = -\frac{Kn}{2(2n+1)} \eta_{n+1} P_{n+1}^{m+1} \sin(m+1)\varphi + \frac{Kn(n-m+1)(n-m+2)}{2(2n+1)} \eta_{n+1} P_{n+1}^{m-1} \sin(m-1)\varphi$$

$$+ \frac{K(n+1)}{2(2n+1)} \eta_{n-1} P_{n-1}^{m+1} \sin(m+1)\varphi - \frac{K(n+1)}{2(2n+1)} (m+n)(m+n-1) \eta_{n-1} P_{n-1}^{m-1} \sin(m-1)\varphi$$

$$Y_y = \frac{Kn}{2(2n+1)} \eta_{n+1} P_{n+1}^{m+1} \cos(m+1)\varphi + \frac{Kn}{2(2n+1)} (n-m+1)(n-m+2) \eta_{n+1} P_{n+1}^{m-1} \cos(m-1)\varphi$$

$$- \frac{K(n+1)}{2(2n+1)} \eta_{n-1} P_{n-1}^{m+1} \cos(m+1)\varphi - \frac{K(n+1)}{2(2n+1)} (m+n)(m+n-1) \eta_{n-1} P_{n-1}^{m-1} \cos(m-1)\varphi$$

$$Y_z = \frac{Kn(n+1-m)}{2n+1} \eta_{n+1} P_{n+1}^{m} \sin m\varphi$$

$$+ \frac{K(n+1)(m+n)}{2n+1} \eta_{n-1} P_{n-1}^{m} \sin m\varphi$$

Aus den Formeln (25) und (26) kann man folgern:

$$\overrightarrow{X} = K^2 A \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Grad} \frac{\partial}{\partial r}(rA) \quad A = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\nu\mu} \eta_\nu P_\nu^\mu \cos\mu\varphi$$

(27)

$$X_x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \eta_\nu P_\nu^\mu \cos\mu\varphi \left\{ \begin{aligned} & \left[- a_{\nu-1,\mu-1} - (a_{\nu-1,0})\right] \frac{K(\nu-1)}{2(2\nu-1)} \\ & + a_{\nu-1,\mu+1} \frac{K(\nu-1)}{2(2\nu-1)} (\nu-\mu)(\nu-\mu-1) \\ & + \left[a_{\nu+1,\mu-1} + (a_{\nu+1,0})\right] \frac{K(\nu+2)}{2(2\nu+3)} \\ & - a_{\nu+1,\mu+1} \frac{K(\nu+2)}{2(2\nu+3)} (\mu+\nu+2)(\mu+\nu+1) \end{aligned} \right\}$$

7)

$$X_y = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{r} \eta_r P_r^{\mu} \sin \mu\varphi \begin{Bmatrix} - \left[a_{r-1,\mu-1} + (a_{r-1,0}) \right] \frac{K(r-1)}{2(2r-1)} \\ - a_{r-1,\mu+1} \frac{K(r-1)}{2(2r-1)} (r-\mu)(r-\mu-1) \\ a_{r+1,\mu-1} + (a_{r+1,0}) \frac{K(r+2)}{2(2r+3)} \\ a_{r+1,\mu+1} \frac{K(r+2)}{2(2r+3)} (\mu+r+2)(\mu+r+1) \end{Bmatrix}$$

$$X_z = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{r} \eta_r P_r^{\mu} \cos \mu\varphi \left[a_{r-1,\mu} \frac{K(r-1)(r-\mu)}{2r-1} + a_{r+1,\mu} \frac{K(r+2)(\mu+r+1)}{2r+3} \right]$$

Dabei gilt für die Klammern $[\ a_{r,\mu-1} - (a_{r,0})\ ]$ **die Festlegung:**

$$\left[a_{r,\mu-1} + (a_{r,0}) \right] = \begin{cases} 2 a_{r0} & \text{wenn } \mu = 1 \\ a_{r\mu-1} & \text{wenn } \mu \neq 1 \end{cases}$$

$$\vec{Y} = K' B \vec{e_z} + \overrightarrow{\mathrm{Grad}} \frac{2}{\eta_2} (rB) \qquad B = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{r} A_{r\mu} \eta_r P_r^{\mu} \sin \mu\varphi$$

$$Y_x = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{r} \eta_r P_r^{\mu} \sin \mu\varphi \begin{Bmatrix} - a_{r-1,\mu-1} \frac{K(r-1)}{2(2r-1)} \\ a_{r-1,\mu+1} \frac{K(r-1)}{2(2r-1)} (r-\mu)(r-\mu-1) \\ a_{r+1,\mu-1} \frac{K(r+2)}{2(2r+3)} \\ - a_{r+1,\mu+1} \frac{K(r+2)}{2(2r+3)} (\mu+r+2)(\mu+r+1) \end{Bmatrix}$$

$$Y_y = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{r} \eta_r P_r^{\mu} \cos \mu\varphi \begin{Bmatrix} a_{r-1,\mu-1} \frac{K(r-1)}{2(2r-1)} \\ a_{r-1,\mu+1} \frac{K(r-1)}{2(2r-1)} (r-\mu)(r-\mu-1) \\ - a_{r+1,\mu-1} \frac{K(r+2)}{2(2r+3)} \\ - a_{r+1,\mu+1} \frac{K(r+2)}{2(2r+3)} (\mu+r+2)(\mu+r+1) \end{Bmatrix}$$

§ 4 Kurzer Abriß der Bromwich Methode der Lösung der Maxwellschen Gleichungen.

Die Maxwellschen Gleichungen lauten:

$$\overrightarrow{rot\,E} = -\frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot\,H} = \sigma\vec{E} + \frac{\overrightarrow{\partial D}}{\partial t}$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$div\,\vec{D} = \rho$$

Von jetzt an wollen wir immer voraussetzen:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} \quad \vec{D} = \varepsilon_2\varepsilon_0\vec{E} \quad \rho = 0$$

und für die Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$

Wir setzen außerdem $\varepsilon_2' = \varepsilon_2 + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ $\varepsilon = \varepsilon_2'\varepsilon_0$

$$\overrightarrow{rot\,E} = i\omega\mu_0\vec{H} \quad \overrightarrow{rot\,H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}$$

$div\,\vec{B} = 0$ und $div\,\vec{D} = 0$ sind dann automatisch erfüllt.

Die Maxwellschen Gleichungen gehen in sich über wenn man die folgende Vertauschung vollzieht

$$\varepsilon \longrightarrow \mu_0 \quad \mu_0 \longrightarrow \varepsilon$$

Demetsprechend gibt es zwei Weisen die Gleichungen zu lösen:

(29)
$$\begin{cases} \vec{H} = -i\omega\varepsilon\,\overrightarrow{rot\,A} \\ \vec{E} = \overrightarrow{rot\,rot\,A} \\ \text{mit } \omega^2\mu_0\varepsilon\vec{A} \\ = \overrightarrow{rot\,rot\,A} + \overrightarrow{Grad\,X} \end{cases}$$

(30)
$$\begin{cases} \vec{E} = i\omega\mu_0\overrightarrow{rot\,B} \\ \vec{H} = \overrightarrow{rot\,rot\,B} \\ \text{mit } \omega^2\mu_0\varepsilon\vec{B} \\ = \overrightarrow{rot\,rot\,B} + \overrightarrow{Grad\,Y} \end{cases}$$

A und B heißen elektrisches bzw. magnetisches Vektorpotential. X und Y sind willkürlich da A und B bis auf ein Gradientenfeld bestimmt sind.

Wir betrachten ein allgemeines orthogonales Koordinatensystem $(x_1\ x_2\ x_3)$. M soll der Ortsvektor sein

$$\vec{e_1} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} \qquad \vec{e_2} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2} \qquad \vec{e_3} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_3}$$

wenn:

$$|\vec{e_1}| = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left| \frac{\vec{e_2}}{\vec{e_3}} \right| = 0$$

das heißt die Bromwich Bedingungen erfüllt sind, dann läßt sich die Bromwich Methode verwenden; der allgemeinste elektromagnetische Zustand läßt sich als Überlagerung von zwei Teilfeldern die von den Formeln (29) und (3o) hergeleitet werden können und in denen die Vektoren A und B in der Richtung $\vec{e_1} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1}$ liegen. Wir setzen $A = |\vec{A}|$ $B = |\vec{B}|$ an, außerdem $e_1 = |\vec{e_1}| = 1$ $e_2 = |\vec{e_2}|$ $e_3 = |\vec{e_3}|$ Die Gleichungen (29) werden :

(31)

$$E_{x_1} = K^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}$$

$$E_{x_2} = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$E_{x_3} = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$H_{x_1} = 0$$

$$H_{x_2} = -\frac{i\omega\varepsilon}{e_3} \frac{\partial A}{\partial x_3}$$

$$H_{x_3} = \frac{i\omega\varepsilon}{e_2} \frac{\partial A}{\partial x_2}$$

Wir haben Grad X = - Grad $\frac{\partial A}{\partial x_1}$ gesetzt; die von A zu befriedigende Gleichung ist

$$\overrightarrow{\text{rot rot}}\, A\vec{e}_1 = \overrightarrow{\text{Grad}} \frac{\partial A}{\partial x_1} + K^2 A\vec{e}_1$$

oder in drei Komponenten zerlegt:

(32)
$$\frac{1}{\ell_2\ell_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\ell_3}{\ell_2}\frac{\partial A}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\ell_2}{\ell_3}\frac{\partial A}{\partial x_3}\right]+\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}+K^2A=0 \qquad x_1$$

$$\frac{1}{\ell_2}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{1}{\ell_1}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2}=0 \qquad x_2$$

$$\frac{1}{\ell_3}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{1}{\ell_3}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_3}=0 \qquad x_3$$

Die zwei letzten Gleichungen sind automatisch erfüllt - aber das liegt eben an unseren Hypothesen:

$$|\vec{\ell_1}|=1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left|\frac{\vec{\ell_2}}{\ell_3}\right|=0$$

Die Gleichung (32) heißt die Bromwich Gleichung. Jetzt wollen wir die Gleichungen (3o) mit B = Be_1 hinschreiben:

(33)
$$H_{x_1}=K^2B+\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2}$$
$$H_{x_2}=\frac{1}{\ell_2}\frac{\partial^2 B}{\partial x_1\partial x_2}$$
$$H_{x_3}=\frac{1}{\ell_3}\frac{\partial^2 B}{\partial x_1\partial x_3}$$
$$E_{x_1}=0$$
$$E_{x_2}=\frac{i\omega\mu_0}{\ell_3}\frac{\partial B}{\partial x_3}$$
$$E_{x_3}=-\frac{i\omega\mu_0}{\ell_2}\frac{\partial B}{\partial x_2}$$

und B soll wie A der Bromwichgleichung unterliegen.
Die skalaren Größen A und B heißen Debysche Potentiale.
Wir wollen jetzt die Bromwichgleichung mit der Schwingungsgleichung vergleichen.
In allgemeinen orthogonalen krummlinigen Koordinaten lautet die Schwingungsgleichung:

$$\frac{1}{\ell_2\ell_3}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\ell_2\ell_3\frac{\partial A}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{\ell_2\ell_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\ell_3}{\ell_2}\frac{\partial A}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\ell_2}{\ell_3}\frac{\partial A}{\partial x_3}\right]+K^2A=0$$

$(\ell_2=1)$

Zum Unterschied zwischen Bromwich und Schwingungsgleichung: anstatt $\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}$ bei Bromwich tritt in der Schwingungsgleichung

$\frac{1}{l_1 l_2 l_3} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(l_2 l_3 \frac{\partial A}{\partial x_1}\right)$ auf; um das gewöhnliche mathematische Rüstzeug benutzen zu können, wird man immer versuchen die Bromwichgleichung auf die Helmholtzsche Schwingungsgleichung durch Variableänderung zurückzuführen.
Wir wollen jetzt den Fall der Kugelkoordinaten und der Cartesischen Koordinaten untersuchen.

Cartesische Koordinaten

Die Veränderlichen heißen hier x,y,z. Wir haben $l_1 = l_2 = l_3 = 1$
Die Bromwichbedingungen sind hier offenbar erfüllt. Die Bromwichgleichung stimmt mit der Schwingungsgleichung überein:

$$\Delta A + k^2 A = 0 \qquad \Delta B + k^2 B = 0$$

Die Gleichungen (31) (33) schreiben sich hier:

$$E_z = K^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \qquad H_z = 0$$

$$E_x = \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} \qquad H_x = -i\omega\varepsilon \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$E_y = \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y} \qquad H_y = i\omega\varepsilon \frac{\partial A}{\partial x}$$

$$E_z = 0 \qquad H_z = K^2 B + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}$$

$$E_x = i\omega\mu_0 \frac{\partial B}{\partial y} \qquad H_x = \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial z}$$

$$E_y = -i\omega\mu_0 \frac{\partial B}{\partial x} \qquad H_y = \frac{\partial^2 B}{\partial y \partial z}$$

Kugelkoordinaten

Die Koordinaten heißen r, θ, φ

$$l_1 = 1 \quad l_2 = r \quad l_3 = r \sin\theta$$

$\frac{l_2}{l_3} = \frac{1}{\sin\theta}$ **hängt nicht von r ab. Die Bromwich-Methode ist verwendbar. Die Bromwichgleichung lautet:**

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2}\right\} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + K^2 A = 0$$

Durch die Transformation A = r$\overline{A}$ wird man zur gewöhnlichen Schwingungsgleichung zurückgeführt

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\overline{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\overline{A}}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\overline{A}}{\partial\varphi^2}\right\} + K^2\overline{A} = 0$$

die allgemeinen Formeln (31) und (33) lauten:

E-Feld

(36)

$$H_r = 0 \qquad E_r = K^2 r\overline{A} + \frac{\partial^2 r\overline{A}}{\partial r^2}$$

$$H_\theta = -\frac{1\omega\varepsilon}{r\sin\theta}\frac{\partial r\overline{A}}{\partial\varphi} \qquad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\overline{A}}{\partial r\partial\theta}$$

$$H_\varphi = \frac{1\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial r\overline{A}}{\partial\theta} \qquad E_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 r\overline{A}}{\partial r\partial\varphi}$$

H-Feld

(37)

$$H_r = K^2 r\overline{B} + \frac{\partial^2 r\overline{B}}{\partial r^2} \qquad E_r = 0$$

$$H_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\overline{B}}{\partial r\partial\theta} \qquad E_\theta = \frac{1\omega\mu_0}{r\sin\theta}\frac{\partial r\overline{B}}{\partial\varphi}$$

$$H_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 r\overline{B}}{\partial r\partial\varphi} \qquad E_\varphi = -\frac{1\omega\mu_0}{r}\frac{\partial r\overline{B}}{\partial\theta}$$

§ 5 Äquivalenzen zwischen verschiedenen Hertzschen Vektoren

Wir wollen hier nur ein Beispiel behandeln, die anderen Formeln lassen sich ganz analog herstellen.
Sei ein Cartesisches Koordinatensystem vorgegeben O x y z; $\vec{w}$ sei der Einheitsvektor der z-Achse.
Ein Feld sei vorgegeben durch seinen Hertzschen Vektoren in der Form

$$\vec{\Pi}^E = \gamma_n(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)\, \sin m\varphi\, \vec{w} \,;$$

dann haben wir:

$$\vec{H} = -i\omega\varepsilon\, \mathrm{rot}\,\vec{\Pi}^E \qquad \vec{E} = k^2\vec{\Pi}^E + \mathrm{Grad}\,\frac{\partial(\Pi^E)}{\partial z}$$

das Problem, das wir lösen wollen ist das Folgende: Wir machen den Ansatz:

$$\vec{\Pi}_1^E = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{r} a_{r\mu}\gamma_r P_r^\mu \cos\mu\varphi\, \vec{o}\vec{w} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{r} b_{r\mu}\gamma_r P_r^\mu \sin\mu\varphi\, \vec{o}\vec{w}$$

$$\vec{\Pi}_2^H = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{r} c_{r\mu}\gamma_r P_r^\mu \cos\mu\varphi\, \vec{o}\vec{w} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{r} d_{r\mu}\gamma_r P_r^\mu \sin\mu\varphi\, \vec{o}\vec{w}$$

und wir wollen die Koeffizienten $a_{r\mu}, b_{r\mu}, c_{r\mu}, d_{r\mu}$ so bestimmen, daß das durch die Hertzschen elektrischen und magnetischen Vektoren $\vec{\Pi}_1^E$ und $\vec{\Pi}_2^H$ definierte Feld mit dem oben angegebenen Feld übereinstimmt.
Dafür schreiben wir daß E_z und H_z in den beiden Fällen durch denselben mathematischen Ausdruck gegeben sind.
Wir haben:

$$\vec{E}_1 = k^2\vec{\Pi}_1^E + \mathrm{Grad}\,\frac{\partial(\Pi^E)}{\partial z} \qquad \vec{H}_2 = -i\omega\varepsilon\, \mathrm{rot}\,\vec{\Pi}_1^E$$

$$\vec{E}_2 = i\omega\mu_0\, \mathrm{rot}\,\vec{\Pi}_2^H \qquad \vec{H}_2 = k^2\vec{\Pi}_2^H + \mathrm{Grad}\,\frac{\partial(\Pi^H)}{\partial z}$$

Wir schreiben:

$$E_{1z} + E_{2z} \equiv E_z$$
$$H_{1z} + H_{2z} \equiv H_z$$

und gewinnen dadurch die Koeffizienten a,b,c,d.

E_{1z} und H_{2z} werden durch die Formeln (28) und (27) angegeben. H_{1z} und E_{2z} durch die Formeln (23) und (24). Dann ist $H_z = 0$ da es sich um ein E-Feld handelt.

$$E_z = K^2 / \overrightarrow{\Pi E} / + \frac{\partial^2}{\partial z^2} / \overrightarrow{\Pi E} /$$

dabei hilft die Formel (19) des § 1.

$$E_{1z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_\nu P_\nu^\mu \cos \mu\varphi \left[a_{\nu-1\mu} \frac{K(\nu-1)(\nu-\mu)}{2\nu-1} + a_{\nu+1\mu} \frac{K(\nu+2)(\mu+\nu+1)}{2\nu+3} \right]$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \gamma_\nu P_\nu^\mu \sin \mu\varphi \left[b_{\nu-1\mu} \frac{K(\nu-1)(\nu-\mu)}{2\nu-1} + b_{\nu+1\mu} \frac{K(\nu+2)(\mu+\nu+1)}{2\nu+3} \right]$$

$$E_{2z} = i\omega\mu_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} c_{\nu\mu}\, \mu\, \gamma_\nu P_\nu^\mu \sin \mu\varphi$$

$$- i\omega\mu_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} d_{\nu\mu}\, \mu\, \gamma_\nu P_\nu^\mu \cos \mu\varphi$$

$$H_{1z} = i\omega\varepsilon \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu\, b_{\nu\mu}\, \gamma_\nu P_\nu^\mu \cos \mu\varphi$$

$$- i\omega\varepsilon \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu\, a_{\nu\mu}\, \gamma_\nu P_\nu^\mu \sin \mu\varphi$$

$$H_{2z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_\nu P_\nu^\mu \cos \mu\varphi \left[c_{\nu-1\mu} \frac{K(\nu-1)(\nu-\mu)}{2\nu-1} + c_{\nu+1\mu} \frac{K(\nu+2)(\mu+\nu+1)}{2\nu+3} \right]$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \gamma_\nu P_\nu^\mu \sin \mu\varphi \left[d_{\nu-1\mu} \frac{K(\nu-1)(\nu-\mu)}{2\nu-1} + d_{\nu+1\mu} \frac{K(\nu+2)(\mu+\nu+1)}{2\nu+3} \right]$$

$$E_z = \frac{K^2}{2n+1} \sin m\varphi \left\{ \begin{array}{l} \frac{(m+n)(m+n-1)}{2n-1} \eta_{n-2} P_{n-2}^m + \frac{(n-n-1)(n-n-2)}{2n+3} \eta_{n+2} P_{n+2}^m \\ \left[\frac{(n+n)(n-n)}{2n-1} + \frac{(n-n-1)(n+n+1)}{2n+3} + 2n+1 \right] \eta_n P_n^m \end{array} \right\}$$

daraus folgert man zuerst unmittelbar a = d = o.
und $b_{r\mu} = c_{r\mu} = 0$, außer wenn $\mu = m$.
Weiterhin haben wir:

$$E_{1z} + E_{2z} = \sum_{r=m}^{\infty} \eta_r P_r^m \sin m\varphi \left[i\omega\mu_0 m c_r + b_{r-1} \frac{K(r-1)(r-m)}{2r-1} + b_{r+1} \frac{K(r+2)(m+r+1)}{2r+3} \right]$$

$$H_{1z} + H_{2z} = \sum_{r=m}^{\infty} \eta_r P_r^m \cos m\varphi \left[i\omega\varepsilon_0 m b_r + c_{r-1} \frac{K(r-1)(r-m)}{2r-1} + c_{r+1} \frac{K(r+2)(m+r+1)}{2r+3} \right]$$

und die Identifizierung dieser Ausdrücke mit E_z und H_z gibt:

$$A_{n+1} = \frac{K(n-m+1)}{(2n+1)(n+1)} \qquad b_{n-1} = \frac{K(m+n)}{n(2n+1)}$$

$$c_n = -\frac{i\omega\varepsilon m}{n(n+1)}$$

Die drei ähnlichen Aufgaben führen zu genau denselben Ergebnissen.

$$\vec{\Pi}^E = \gamma_n P_n^m \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi \; \vec{w}$$

$$\begin{cases} \vec{\Pi}_1^E = \left[\frac{K(n-m+1)}{(2n+1)(n+1)}\gamma_{n+1} P_{n+1}^m + \frac{K(n+m)}{n(2n+1)}\gamma_{n-1} P_{n-1}^m\right] \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi \; \vec{OH} \\ \vec{\Pi}_2^E = -iw\varepsilon \frac{m}{n(n+1)} \gamma_n P_n^m \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} m\varphi \; \vec{OH} \end{cases}$$

(38)

$$\vec{\Pi}^H = \gamma_n P_n^m \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi \; \vec{w}$$

$$\begin{cases} \vec{\Pi}_1^H = \left[\frac{K(n-m+1)}{(2n+1)(n+1)}\gamma_{n+1} P_{n+1}^m + \frac{K(n+m)}{n(2n+1)}\gamma_{n-1} P_{n-1}^m\right] \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi \; \vec{OH} \\ \vec{\Pi}_2^E = iw\mu_0 \frac{m}{n(n+1)} \gamma_n P_n^m \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} m\varphi \; \vec{OH} \end{cases}$$

§ 6 Aufspaltung im E-Feld und H-Feld bezüglich einer Richtung von ebenen Wellen.

Debysche Potentiale von ebenen Wellen.
Fresnelsche Gesetze.

Was entspricht $\vec{\Pi}^E = e^{i\vec{K}\cdot\vec{H}}$ wo $\vec{w}$ der Einheitsvektor der z-Achse ist? Wir benutzen die Formel (34) und finden $\vec{H} = \vec{H_0} e^{i\vec{K}\cdot\vec{H}}$ $H_0 \parallel$ zur x 0 y Ebene H_0 in der Richtung $\varphi - \pi/2$

$$|\vec{H_0}| = w\varepsilon |\vec{K}| \sin\theta \qquad (39)$$

E ist dann eindeutig dadurch bestimmt, daß das Dreibein E,H,K re drehend ist.

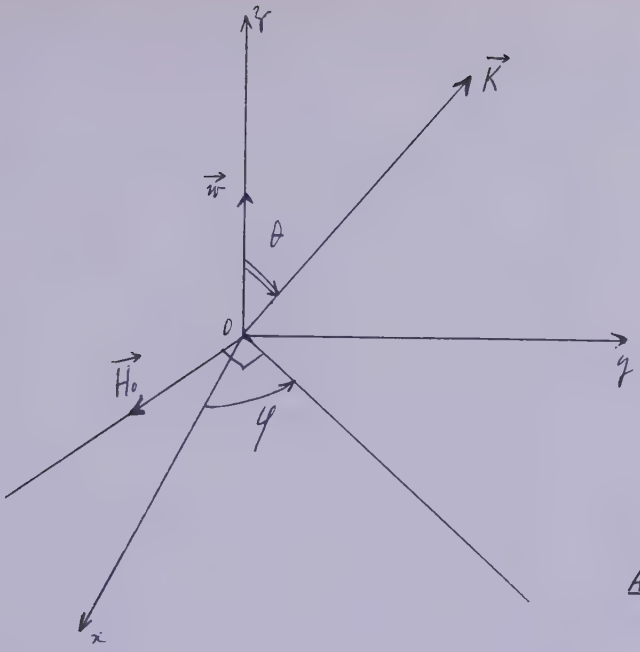


Abb 3

und nun:

$$\overrightarrow{\Pi^H} = e^{i\vec{K}\cdot\vec{w}}\,\vec{w}$$

Die Formel (35) gibt: $\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{i\vec{K}\cdot\vec{w}}$ $\mathbf{E_0}$ liegt parallel zur x 0 y Ebene, in der Richtung $\varphi + \pi/2$ und endlich haben wir:

$$(40) \qquad \boxed{|\vec{E_0}| = \omega\mu_0 |\vec{K}| \sin\theta}$$

Es ist unmöglich eine ebene Welle mit E und H senkrecht zur z-Achse durch einen Hertzschen Vektor parallel zur z-Achse darzustellen.

Wir wollen jetzt ein anderes Problem anschneiden, nämlich das des Überganges von einer Achse zu einer anderen.

Ein Feld sei durch den folgenden Hertzschen Vektor vorgegeben:

$$\overrightarrow{\Pi^E} = e^{iK[\alpha x + \beta y + \gamma z]}\,\vec{v}$$

wo $\vec{v}$ der Einheitsvektor der y-Achse ist. Gesucht sind ein elektri-

scher und magnetischer Hertzscher Vektor parallel zur z-Achse die zum selben Feld führen.
Wir machen den Ansatz:

(41a)

$$\vec{\Pi}^E_y = e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\,\vec{w}$$

Äquivalent mit

$$\vec{\Pi}^E = b\, e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\,\vec{w}$$

$$\vec{\Pi}^H = c\, e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\,\vec{w}$$

b und c sind so zu bestimmen, daß z.B.

$$-i\omega\varepsilon\, \mathrm{rot}\,\vec{\Pi}^E_y = -i\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\,\vec{\Pi}^E + K^2\vec{\Pi}^H + \mathrm{grad}\,\frac{\partial \vec{\Pi}^H_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} H_x = -i\omega\varepsilon K y = \omega K\varepsilon\beta\, b - K^2 c\alpha\gamma \\ H_y = 0 = \omega K\varepsilon\alpha\, b - K^2 c\beta\gamma \\ H_z = \omega\varepsilon K\alpha = K^2 c - K^2\gamma^2 c \end{cases}$$

daraus folgt:

(41b)

$$c = \frac{\omega\varepsilon\alpha}{K(1-\gamma^2)} \qquad b = -\frac{\beta\gamma}{1-\gamma^2}$$

analoge Rechnungen geben dann:

(42)

$$\vec{\Pi}^E_x = e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\,\vec{w}$$

Äquivalent mit

$$\vec{\Pi}^E = -\frac{\alpha\gamma}{1-\gamma^2}\, e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\,\vec{w}$$

$$\vec{\Pi}^H = -\frac{\omega\varepsilon\beta}{K(1-\gamma^2)}\, e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\,\vec{w}$$

$$\vec{\Pi}^H_x = e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\vec{u}$$

Aequivalent mit:

(43)

$$\vec{\Pi}^H = -\frac{\alpha\gamma}{1-\gamma^2}e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\vec{w}$$

$$\vec{\Pi}^E = \frac{\omega\mu\varepsilon\beta}{K(1-\gamma^2)}e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\vec{w}$$

$$\vec{\Pi}^H_y = e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\vec{v}$$

Aequivalent mit

(44)

$$\vec{\Pi}^H = -\frac{\beta\gamma}{1-\gamma^2}e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\vec{w}$$

$$\vec{\Pi}^E = -\frac{\omega\mu\varepsilon\alpha}{K(1-\gamma^2)}e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\vec{w}$$

Wir wollen jetzt das folgende Problem lösen: Eine ebene Welle mit E oder H senkrecht zur z-Achse sei durch ihren Hertzschen Vektor

$$\vec{\Pi}^E \text{ oder } \vec{\Pi}^H = e^{iK[\alpha x+\beta y+\gamma z]}\vec{w}$$

vorgegeben.
Gesucht sind die entsprechenden radialen elektrischen und magnetischen Hertzschen Vektoren.
Dieses Problem wurde von P. Debye in dem Fall gelöst, wo die Wellenebene senkrecht zur z-Achse steht. Aber eben in diesem Falle läßt sich diese ebene Welle mit Hilfe von Hertzschen Vektoren parallel zur z-Achse nicht darstellen.
Wir wollen wie folgt vorgehen:

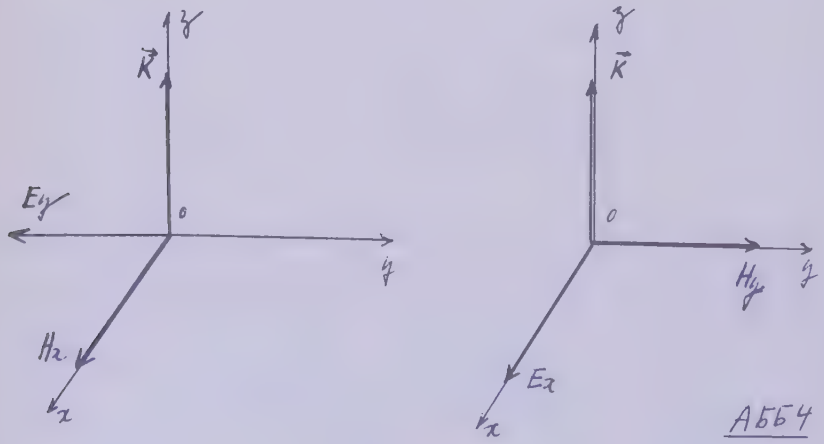
1.) Wir suchen die Debyschen Potentiale der ebenen Welle senkrecht zur z-Achse im Falle wo E parallel zur z-Achse liegt und im Falle wo H parallel zur x-Achse liegt.

2.) Durch geeignete Drehung des Dreibeins - wir brauchen nur zwei Eulersche Winkel - suchen wir die Debyschen Potentiale ei schräg einfallenden ebenen Welle jedoch mit H oder E parallel zur x O y Ebene.

3.) Wir machen uns frei von den Feldern E und H und suchen eine direkte Korrespondenz zwischen Hertzschen Vektoren parallel zur z-Achse und äquivalente Paare von radialen Hertzschen Vektoren.

1.) Radiale Hertzsche Vektoren für $E_x = e^{ikz}$ und $E_y = e^{ikz}$

Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$



АББ4

$$E_x = e^{ikz} \qquad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\, e^{ikz}$$

$$\begin{cases} E_r = e^{ikz} \sin\theta\cos\varphi \\ E_\theta = e^{ikz}\cos\theta\cos\varphi \\ E_\varphi = -e^{ikz}\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} H_r = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\, e^{ikz}\sin\theta\sin\varphi \\ H_\theta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\, e^{ikz}\cos\theta\sin\varphi \\ H_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\, e^{ikz}\cos\varphi \end{cases}$$

Wir folgen der Debyschen Methode unter Berücksichtigung von (36) und (37)

$$e^{ikz\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1)\, \psi_n(kz)\, P_n(\cos\theta)$$

$$E_z = e^{ikz\cos\theta} \sin\theta \cos\varphi = -\sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} (2n+1) \frac{\psi_n(kz)}{kz} P_n'(\cos\theta) \cos\varphi$$

aber $$E_z = \frac{\partial^2(z\bar{A})}{\partial z^2} + K^2(z\bar{A})$$

andrerseits.

$$\frac{d^2\psi_n(kz)}{dz^2} kz + \left[K^2 - \frac{n(n+1)}{z^2}\right] kz\, \psi_n(kz) = 0$$

mit dem Ansatz:

$$z\bar{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(kz) P_n'(\cos\theta) \cos\varphi$$

$$\frac{\partial^2(z\bar{A})}{\partial z^2} + K^2(z\bar{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n(n+1)}{z^2} \psi_n(kz) kz\, P_n'(\cos\theta) \cos\varphi$$

der Vergleich gibt: $$a_n = -\frac{i^{n-1}}{K^2} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Die Rechnung von B verläuft analog. Man hat also:

(45)

$$E_z = e^{ikz} \qquad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\, e^{ikz}$$

$$\bar{A} = -\frac{1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \psi_n(kz) P_n'(\cos\theta) \cos\varphi$$

$$\bar{B} = -\frac{1}{K} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \psi_n(kz) P_n'(\cos\theta) \sin\varphi$$

Die Aufteilung in E-Feld und H-Feld bleibt erhalten bei einer Drehung von $+\pi/2$ um die z-Achse. Wir ersetzen φ durch $\varphi+\pi/2$ in den Formeln (45) und erhalten:

$$E_\varphi = -\,e^{ikz} \qquad H_r = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\, e^{ikz}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{K}\sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\psi_n(kr)\,P_n^1(\cos\theta)\sin\varphi \tag{46}$$

$$\bar{B} = -\frac{1}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\, i^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\psi_n(kr)\,P_n^1(\cos\theta)\cos\varphi$$

Jetzt gehen wir über zur Ausrechnung der Größen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ - d.h. die Debyschen Potentiale - im Falle einer beliebigen Ausbreitungsrichtung (θ_0, φ_0) mit der Einschränkung, daß der Vektor H oder der Vektor E parallel zur x O y Ebene sein soll.

Wir führen ein Koordinatensystem $X_3Y_3Z_3$ ein bei dem die Achse Z_3 mit der Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle übereinstimmt und bei dem X_3 sich in der X_1 O Y_1 Ebene befindet. Bezüglich dieses Koordinatensystems lassen sich die Formeln (45) und (46) verwenden. Wir bemerken dann, daß die Aufspaltung in E-Feld und H-Feld die gleiche ist für zwei Kugelkoordinatensysteme, die denselben Koordinatenursprung haben. Die radialen magnetischen und elektrischen Vektorpotentiale bleiben ungeändert. Dies ist hier der Fall. Wir brauchen nur noch die Skalare $\bar{A}$ und $\bar{B}$ gegeben durch die Formel (45) und (46) bezüglich des Koordinatensystems $(X_3Y_3Z_3)$ mit Hilfe der Koordinaten $(X_1Y_1Z_1)$ auszudrücken. Also ein rein skalares Problem.

Zur Figur 5

$\overrightarrow{n_m}, \overrightarrow{\theta_m}, \overrightarrow{\varphi_m}$ sind Einheitsvektor im m-ten Koordinatensystem φ, θ, r sind die Kugelkoordinaten bezüglich des $(X_1, Y_1 Z_1)$ Koordinatensystems.

$\bar{\varphi}, \bar{\theta}, \bar{r}$ die Kugelkoordinaten bezüglich des $(X_3Y_3Z_3)$ Koordinatensystems.

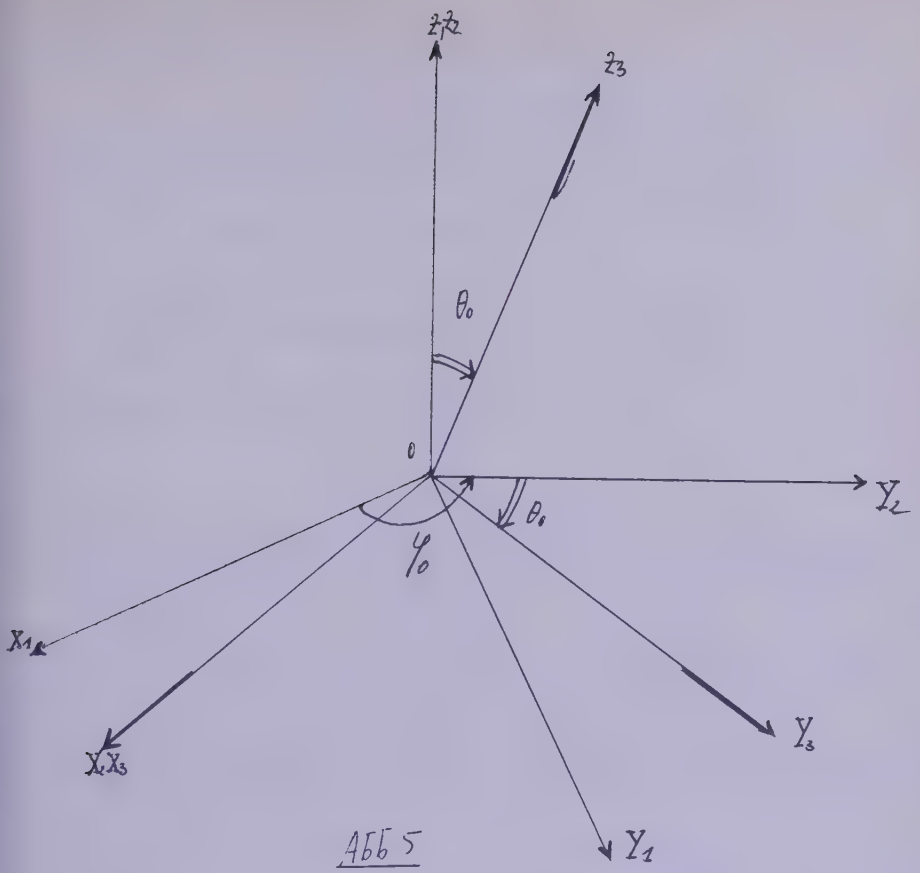


Abb 5

Wir setzen:

$$\theta_0 = (\vec{w_1}, \vec{w_3}) \qquad \varphi_0 = (\vec{u_2}, \vec{v_2})$$

(θ_0, φ_0) Richtung der ebenen Welle. Ein Punkt der Einheitskugel sei vorgegeben mit den Koordinaten θ, φ ; gesucht werden die Kartesischen Koordinaten (x_3 y_3 z_3) bezüglich des Systems (X_3 Y_3 Z_3).

Aber
$$x_3 = \vec{OM} \cdot \vec{u_3}$$
$$y_3 = \vec{OM} \cdot \vec{v_3}$$
$$z_3 = \vec{OM} \cdot \vec{w_3}$$

Wir benutzen die wohlbekannte Formel $\cos(\vec{A}, \vec{B}) =$

$$\cos\theta_A \cos\theta_B + \sin\theta_A \sin\theta_B \cos(\varphi_A - \varphi_B)$$

wobei hier $\vec{A} = \vec{OM}$ ist und $\vec{B}$ jeweils $\vec{u_3}$, $\vec{v_3}$, $\vec{w_3}$.

Infolgedessen:

$$\begin{cases} x_3 = \sin\theta \sin(\varphi_0 - \varphi) \\ y_3 = \sin\theta \cos\theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) - \cos\theta \sin\theta_0 \\ z_3 = \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) + \cos\theta \cos\theta_0 \end{cases}$$

$$z_3 = \cos\Theta = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi_0 - \varphi)$$

$$P_n(\cos\Theta) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta_0) + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{n-m!}{n+m!} P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta_0)\cos m(\varphi - \varphi_0)$$

Wir wollen jetzt $P_n'(\cos\Theta)\cos\Phi$ **und** $P_n'(\cos\theta)\sin\Phi$ **als Funktion von** φ **und** θ **ausrechnen.**

$$\cos\Phi\, P_n'(\cos\Theta) = -\frac{dP_n(\cos\Theta)}{d(\cos\Theta)} \sin\Theta\cos\Phi$$

$$\sin\Phi\, P_n'(\cos\Theta) = -\frac{dP_n(\cos\Theta)}{d(\cos\Theta)} \sin\Theta\sin\Phi$$

aber

$$\sin\Phi\sin\Theta = y_3$$

$$\cos\Phi\sin\Theta = x_3$$

andererseits:

$$\frac{dP_n(\cos\Theta)}{d(\cos\Theta)} = \frac{\frac{\partial P_n(\cos\Theta)}{\partial\varphi_0}}{\frac{\partial(\cos\Theta)}{\partial\varphi_0}} = \frac{\frac{\partial P_n(\cos\Theta)}{\partial\theta_0}}{\frac{\partial(\cos\Theta)}{\partial\theta_0}}$$

Das gibt zwei äquivalente Ausdrücke:

$$\frac{d P_n(\cos\Theta)}{d(\cos\Theta)} = \frac{2\sum_{m=1}^{n} m \frac{n-m!}{n+m!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta_0) \sin m(\varphi_0-\varphi)}{\sin\theta \sin\theta_0 \sin m(\varphi_0-\varphi)}$$

$$\frac{d P_n(\cos\Theta)}{d(\cos\Theta)} = \frac{P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta_0) + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{n-m!}{n+m!} P_n^m(\cos\theta) \frac{d}{d\theta_0} P_n^m(\cos\theta_0) \cos m(\varphi_0-\varphi)}{-\cos\theta \sin\theta_0 + \sin\theta \cos\theta_0 \cos(\varphi_0-\varphi)}$$

Der Nenner des ersteren dieser beiden Ausdrücke ist gleich x_3, der Nenner des zweiten gleich Y_3.
Wir multiplizieren beide Seiten bzw. mit diesen Nennern und erhalten

(47)

$$P_n'(\cos\Theta)\cos\Phi = -\frac{2}{\sin\theta_0}\sum_{m=1}^{n} \frac{n-m!}{n+m!} m P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta_0) \sin m(\varphi_0-\varphi)$$

$$P_n'(\cos\Theta)\sin\Phi = -P_n(\cos\theta)P_n'(\cos\theta_0) - 2\sum_{m=1}^{n} \frac{n-m!}{n+m!} P_n^m \frac{d}{d\theta_0} P_n^m(\cos\theta_0)\cos m(\varphi_0-\varphi)$$

Wir kommen auf frühere Ergebnisse zurück Formel (39) und (40)

$$\overrightarrow{\Pi^E} = e^{i\overrightarrow{K(r,\varphi)}\cdot\vec{u}_{\overrightarrow{w_z}}} = e^{i\cdot k z_3} = e^{ik[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]}_{\overrightarrow{w_z}}$$

entspricht:

$$H_{z3} = \omega\varepsilon K \sin\theta_0\, e^{ikz_3}$$

$$E_{y3} = -\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\, K \sin\theta_0\, e^{ikz_3}$$

(46) gibt dann:

$$\bar{A} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,\sin\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\psi_n(kr)\,P_n'(\cos\Theta)\sin\Phi$$

$$\bar{B} = -\omega\varepsilon\sin\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\psi_n(kr)\,P_n'(\cos\Theta)\cos\Phi$$

$$\overrightarrow{\Pi^H} = e^{ikz_3}\,\overrightarrow{w_x} = e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi_0-\varphi)]}\,\overrightarrow{w_x}$$

entspricht:

$$E_{x_3} = -\omega\mu_0 K \sin\theta_0\, e^{ikz_3}$$

$$H_{y_3} = -\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,K\sin\theta_0\, e^{ikz_3}$$

(45) gibt dann:

$$\bar{A} = \omega\mu_0\sin\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\psi_n(kr)\,P_n'(\cos\Theta)\cos\Phi$$

$$\bar{B} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,\sin\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\psi_n(kr)\,P_n'(\cos\Theta)\sin\Phi$$

Schließlich verwendet man die Formeln (47) um $P_n'(\cos\Theta)\cos\Phi$ **bzw.** $P_n'(\cos\Theta)\sin\Phi$ **als Funktion von** θ, φ **auszudrücken. Wir fassen zusammen:**

$$\overrightarrow{\Pi^E} = e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi_0-\varphi)]}\,\overrightarrow{w_x}$$

Äquivalent mit dem Satz:

(48)

$$\bar{A} = -\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,\sin\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\psi_n(kr)\times$$
$$\times\left\{P_n(\cos\theta)P_n'(\cos\theta_0) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{n-m!}{n+m!}\,P_n^m(\cos\theta)\frac{d}{d\theta_0}P_n^m(\cos\theta_0)\cos m(\varphi_0-\varphi)\right\}$$

$$\bar{B} = \omega\varepsilon\sin\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\psi_n(kr)\times$$
$$\times\left\{\frac{2}{\sin\theta_0}\sum_{m=1}^{\infty} m\,\frac{n-m!}{n+m!}\,P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta_0)\sin m(\varphi_0-\varphi)\right\}$$

$$\overline{\Pi^H} = e^{ikz[\cos t \cos\theta_0 + \sin t \sin\theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)]} \rightarrow \overline{w_z}$$

Aequivalent mit dem Satz

$$\overline{A} = -2ik\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \psi_n(kr) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{n} \frac{n-m!}{n+m!} m P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta_0) \sin m(\varphi_0 - \varphi)$$

$$\overline{B} = -ik\sqrt{\varepsilon\mu_0} \sin\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \psi_n(kr) \times$$

$$P_n(\cos\theta) P_n'(\cos\theta_0) + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{n-m!}{n+m!} P_n^m(\cos\theta) \frac{d}{d\theta_0} P_n^m(\cos\theta_0) \cos m(\varphi_0 - \varphi)$$

Wir wenden uns einem anderen Problem zu, nämlich die Aufstellung der Fresnelschen Formeln. Wir betrachten dieses Problem wie eine Randwertaufgabe, es soll gelten:

$$E_{T1} = E_{T2} \qquad H_{T1} = H_{T2}$$

Eine einfallende Ebene TEM-Welle mit E senkrecht zur Einfallsebene und daher H im Einfallsebene wird in eine ebensolchen Welle reflektiert und gebrochen. An Hand der Formeln (34) genügen:

$$\varepsilon_1 A_1 = \varepsilon_2 A_2 \qquad \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{\partial A_2}{\partial z}$$

Die Trennungsfläche soll die Ebene z = d sein.

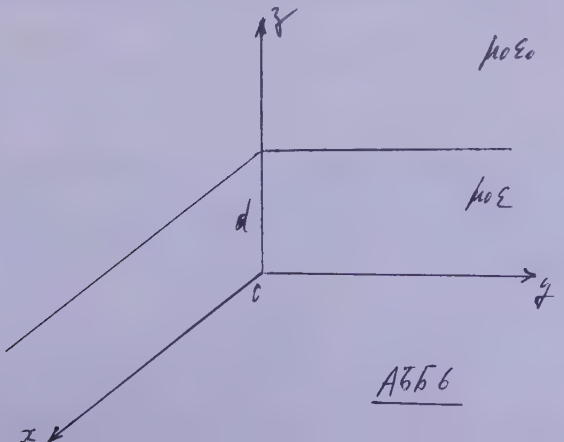


Abb 6

Einfallende Welle $A_e = e^{ik[\alpha x + \beta y + \gamma(z-d)]}$

Reflektierte Welle $A_r = e^{ik[\alpha x + \beta y - \gamma(z-d)]} f_r$

Gebrochene Welle $A_g = e^{ik_0[\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0(z-d)]} f_g$

Die Randbedingungen fordern:

$$K\alpha = K_0\alpha_0 \quad K\beta = K_0\beta_0 \quad \text{also} \quad K_0\sqrt{1-\beta_0^2} = K\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\text{mit } n = \frac{K}{K_0} \quad \gamma_0 = \sqrt{n^2(\beta^2-1)+1}$$

$$\varepsilon(1+f_r) = \varepsilon_0 f_g$$

$$K\gamma(1-f_r) = K_0\gamma_0 f_g$$

daraus folgt:

(50)

$$f_g = \frac{2n^2\gamma}{\gamma + n\sqrt{n^2(\beta^2-1)+1}}$$

$$f_r = \frac{\gamma - n\sqrt{n^2(\beta^2-1)+1}}{\gamma + n\sqrt{n^2(\beta^2-1)+1}}$$

Eventuell $\operatorname{Im}\left\{\sqrt{n^2(\beta^2-1)+1}\right\} > 0$

H senkrecht zur Einfallsebene. Eine einfallende Ebene TEM Welle mit H senkrecht zur Einfallsebene und daher E in Einfallsebene wird in eine ebensolche Welle reflektiert und gebrochen.
Es soll gelten:

$$B_1 = B_2 \qquad \frac{\partial B_1}{\partial z} = \frac{\partial B_2}{\partial z}$$

Einfallende Welle $B_e = e^{ik[\alpha x + \beta y + \gamma(\beta - d)]}$

Reflektierte Welle $B_r = e^{ik[\alpha x + \beta y - \gamma(\beta - d)]} \overline{f_r}$

Gebrochene Welle $B_g = e^{ik_0[\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0(\beta - d)]} \overline{f_g}$

Infolgedessen $k\alpha = k_0\alpha_0 \quad k\beta = k_0\beta_0 \quad k_0\sqrt{1-\gamma_0^2} = k\sqrt{1-\gamma^2}$

$$\gamma_0 = \sqrt{n^2(\gamma^2-1)+1}$$

$$1 + \overline{f_r} = \overline{f_d}$$

$$k\gamma(1 - \overline{f_r}) = k_0\gamma_0\overline{f_d}$$

daraus folgt:

(51)

$$\overline{f_r} = \frac{n\gamma - \sqrt{n^2(\gamma^2-1)+1}}{n\gamma + \sqrt{n^2(\gamma^2-1)+1}}$$

$$\overline{f_g} = \frac{2n\gamma}{n\gamma + \sqrt{n^2(\gamma^2-1)+1}}$$

Eventuell $\mathrm{Im}\left\{\sqrt{n^2(\gamma^2-1)+1}\right\} > 0$

§ 7 Äquivalenz gewisser Potentialfelder

Die Rechnungen sind äußerst langwierig, deshalb werden wir uns damit begnügen nur ein Beispiel zu geben und dann nur noch die Ergebnisse der anderen Rechnungen anzuschreiben. Vorerst fangen wir mit einem rein skalaren Problem an. Die Gleichungen (16) bis (19) des ersten Paragraphen zeigen, daß sich jede charakteristische Funktion $\eta_n(Kr)\,P_n^m(\cos\theta)\,\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}$ aus einem Differentiationsprozeß nach x,y,z angewandt auf die Funktion $\eta_0(Kr)\,P_0(\cos\theta)$ ergibt.

Zum Beispiel:

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\eta_0 P_0 = K\,\eta_1 P_1^1 \sin\varphi$$

infolgedessen $\eta_1 P_1' \sin\varphi = \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial y}\eta_0 P_0$

aber

$$\frac{1}{K}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\eta_0 P_0 = \frac{\partial}{\partial y}\eta_1 P_1' \sin\varphi = -\frac{K}{3}\eta_2 P_2' \sin\varphi$$

infolgedessen $\eta_2 P_2' \sin\varphi = -\frac{3}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\eta_0 P_0$

In ähnlicher Weise

$$\begin{cases} \eta_1 P_1' \cos\varphi = \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x}\eta_0 P_0 \\ \eta_1 P_1' \sin\varphi = \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial y}\eta_0 P_0 \\ \eta_1 P_1 = -\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial z}\eta_0 P_0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\eta_2 L_2 = \left(\frac{3}{2k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{4}{2}\right)\eta_0 L_0 \\
\eta_2 L_2' \sin\varphi = -\frac{3}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\eta_0 L_0 \\
\eta_2 L_2' \cos\varphi = -\frac{3}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\eta_0 L_0 \\
\eta_2 L_2^2 \sin 2\varphi = \frac{6}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\eta_0 L_0 \\
\eta_2 L_2^2 \cos 2\varphi = \left(\frac{6}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{3}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3\right)\eta_0 L_0
\end{cases}
$$

Wir bermerkennnoch:
Wenn u die Schwingungsgleichung befriedigt $\Delta u + k^2 u = 0$ dann ist

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2$$

Hier ist $u = \eta_0 L_0$

Die Operatoren, die oben angegeben sind, sind also nicht eindeutig. Z. B.

$$\eta_2 L_2^2 \cos 2\varphi = \left(\frac{6}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{3}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3\right)\eta_0 L_0$$

Könnte wie folgt geschrieben werden:

$$\eta_2 L_2^2 \cos 2\varphi = \left(\frac{3}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{3}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\eta_0 L_0$$

Es ist klar, daß die oben angegebenen Operatoren nur eindeutig werden, wenn man fordert, daß es nur einmalige Differentiation nach z geben soll, denn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2\right) f$$

und

$$\frac{\partial^{2p+1}}{\partial z^{2p+1}} \equiv \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\right)^p$$

Nach diesen vorbereitenden Überlegungen wenden wir uns dem eigentlichen Problem dieses Paragraphen zu.
Dieses Problem ist das folgende: Gegeben sei der elektrische oder magnetische radiale Hertzsche Vektor:

$$\overrightarrow{\Pi} = \eta_n P_n^m \frac{\cos}{\sin} m\varphi \, \overrightarrow{OM}$$

Gesucht ist eine Kombination von drei skalaren A,B,C derart, daß

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Pi_A} = A\,\vec{u} \\ \overrightarrow{\Pi_B} = B\,\vec{v} \\ \overrightarrow{\Pi_C} = C\,\vec{w} \end{cases}$$

ein äquivalentes Potentialfeld darstellt. Das heißt

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{\Pi} \equiv \mathrm{rot}\left(\overrightarrow{\Pi_A}+\overrightarrow{\Pi_B}+\overrightarrow{\Pi_C}\right)$$

man kann dieses Problem wie folgt lösen ausgehend von der Tatsach
daß :

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{\Pi} = \mathrm{rot}\,\eta_0(kr)\,P_0(\cos\theta)\,\overrightarrow{OM}$$

ein Feld identisch null darstellt, folgert man, daß irgendein Operator angewandt auf $\overrightarrow{\Pi}$ wiederum ein Nullfeld ergibt.
Zum Beispiel $\frac{\partial}{\partial z}\eta_0 P_0 \overrightarrow{OM}$ ist wirbelfrei:

$$\rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z}\eta_0 P_0\right)\overrightarrow{OM} + \eta_0 P_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{OM}\right) \sim 0$$

aber $\frac{\partial}{\partial z}\eta_0 P_0 = -K\eta_1 P_1$

und $\frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{OM} = \vec{w}$

infolgedessen

$$K\eta_1 P_1 \overrightarrow{OM} \sim \eta_0 P_0 \vec{w}$$

und $\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0 \rho_0 \overrightarrow{cu})$ ist ebenfalls wirbelfrei

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\eta_0\rho_0\right)\overrightarrow{cu} + \eta_0\rho_0\overrightarrow{w} \sim 0$$

$$\longrightarrow K\,\eta_1\rho_1'\cos\gamma\,\overrightarrow{cu} \sim -\eta_0\rho_0\overrightarrow{w}$$

man findet ebenfalls durch Ableitung nach y

$$K\eta_1\rho_1'\sin\gamma\,\overrightarrow{cu} \sim -\eta_0\rho_0\overrightarrow{v}$$

Jetzt verwenden wir eine Ableitung zweiter Ordnung

$$\mathrm{rot}(\eta_0\rho_0\overrightarrow{cu}) = 0 \quad \text{mithin} \quad \mathrm{rot}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(\eta_0\rho_0\overrightarrow{cu}) = 0$$

$$\text{aber} \quad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(\eta_0\rho_0\overrightarrow{cu}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\eta_0\rho_0\right)\overrightarrow{cu} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta_0\rho_0)\overrightarrow{v} - \frac{\partial}{\partial y}(\eta_0\rho_0)\overrightarrow{u}$$

$$\text{also} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\eta_0\rho_0\right)\overrightarrow{cu} \sim -\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0\rho_0)\overrightarrow{v} - \frac{\partial}{\partial y}(\eta_0\rho_0)\overrightarrow{u}$$

das heißt:

$$K\eta_2\rho_2'\cos\gamma\,\overrightarrow{cu} \sim 3\eta_1\rho_1'\cos\gamma\,\overrightarrow{w} - 3\eta_1\rho_1\overrightarrow{u}$$

oder unter Berücksichtigung der Ausdrücke für $\eta_1\rho_1'\cos\gamma$ und $\eta_1\rho_1$ die am Anfang dieses Paragraphen angegeben wurden:

$$K\eta_2\rho_2'\cos\gamma\,\overrightarrow{cu} \sim \frac{3}{K}\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0\rho_0)\overrightarrow{w} + \frac{3}{K}\frac{\partial}{\partial y}(\eta_0\rho_0)\overrightarrow{u}$$

so erscheint die Miesche partielle Welle $\eta_2\rho_2'\cos\gamma\,\overrightarrow{cu}$ als Überlagerung von zwei Quadripolen. Durch Wiederholung derselben Prozedur gewinnt man:

(52a)
$$\begin{cases} K\eta_1\rho_1\,\overrightarrow{cu} \sim \eta_0\rho_0\overrightarrow{w} \\ K\eta_1\rho_1'\cos\gamma\,\overrightarrow{cu} \sim -\eta_0\rho_0\overrightarrow{u} \\ K\eta_1\rho_1'\sin\gamma\,\overrightarrow{cu} \sim -\eta_0\rho_0\overrightarrow{v} \end{cases}$$

(52b)
$$\begin{cases} K\eta_2\rho_2\,\overrightarrow{cu} \sim 3\eta_1\rho_1\overrightarrow{w} \\ K\eta_2\rho_2'\cos\gamma\,\overrightarrow{cu} \sim 3\eta_1\rho_1'\cos\gamma\,\overrightarrow{w} - 3\eta_1\rho_1\overrightarrow{u} \\ K\eta_2\rho_2'\sin\gamma\,\overrightarrow{cu} \sim 3\eta_1\rho_1'\sin\gamma\,\overrightarrow{w} - 3\eta_1\rho_1\overrightarrow{v} \\ K\eta_2\rho_2^2\sin\gamma\cos\gamma\,\overrightarrow{cu} \sim -6\eta_1\rho_1'\sin\gamma\,\overrightarrow{u} - 6\eta_1\rho_1'\cos\gamma\,\overrightarrow{v} \\ K\eta_2\rho_2^2\cos^2\gamma\,\overrightarrow{cu} \sim -6\eta_1\rho_1'\cos\gamma\,\overrightarrow{u} + 6\eta_1\rho_1'\sin\gamma\,\overrightarrow{v} \end{cases}$$

(52c)
$$
\begin{cases}
K\eta_3 P_3\,\overline{OH}\,\nu \sim 5\eta_2 P_2\,\vec{w} - \eta_0 P_0\,\vec{w} \\
K\eta_3 P_3'\sin\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim 5\eta_2 P_2'\sin\varphi\,\vec{w} - 5\eta_2 P_2\,\vec{v} + \eta_0 P_0\,\vec{v} \\
K\eta_3 P_3'\cos\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim 5\eta_2 P_2'\cos\varphi\,\vec{w} - 5\eta_2 P_2\,\vec{u} + \eta_0 P_0\,\vec{u} \\
K\eta_3 P_3^2\sin 2\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim 5\eta_2 P_2'^2\sin 2\varphi\,\vec{w} - 10\eta_2 P_2'\sin\varphi\,\vec{u} - 10\eta_2 P_2'\cos\varphi\,\vec{v} \\
K\eta_3 P_3^2\cos 2\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim 5\eta_2 P_2'^2\cos 2\varphi\,\vec{w} + 10\eta_2 P_2'\sin\varphi\,\vec{v} - 10\eta_2 P_2'\cos\varphi\,\vec{u} \\
K\eta_3 P_3^3\sin 3\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim -15\eta_2 P_2'^2\sin 2\varphi\,\vec{u} - 15\eta_2 P_2'^2\cos 2\varphi\,\vec{v} \\
K\eta_3 P_3^3\cos 3\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim 15\eta_2 P_2'^2\sin 2\varphi\,\vec{v} - 15\eta_2 P_2'^2\cos 2\varphi\,\vec{u}
\end{cases}
$$

Aber man kann auch wie folgt schreiben:

(52d)
$$
\begin{cases}
K\eta_2 P_2\,\overline{OH}\,\nu \sim -\frac{3}{K}\frac{\partial}{\partial z}(\eta_0 P_0)\,\vec{w} \\
K\eta_2 P_2'\cos\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim \frac{3}{K}\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0 P_0)\,\vec{w} + \frac{3}{K}\frac{\partial}{\partial z}(\eta_0 P_0)\,\vec{u} \\
K\eta_2 P_2'\sin\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim \frac{3}{K}\frac{\partial}{\partial y}(\eta_0 P_0)\,\vec{w} + \frac{3}{K}\frac{\partial}{\partial z}(\eta_0 P_0)\,\vec{v} \\
K\eta_2 P_2'^2\cos 2\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim -\frac{6}{K}\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0 P_0)\,\vec{u} + \frac{6}{K}\frac{\partial}{\partial y}(\eta_0 P_0)\,\vec{v} \\
K\eta_2 P_2'^2\sin 2\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim -\frac{6}{K}\frac{\partial}{\partial y}(\eta_0 P_0)\,\vec{u} - \frac{6}{K}\frac{\partial}{\partial x}(\eta_0 P_0)\,\vec{v}
\end{cases}
$$

(52e)
$$
\begin{cases}
K\eta_3 P_3\,\overline{OH}\,\nu \sim \left(\frac{15}{2K^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{3}{2}\right)\eta_0 P_0\,\vec{w} \\
K\eta_3 P_3'\sin\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim -\frac{15}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\eta_0 P_0\,\vec{w} - \left(\frac{15}{2K^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{3}{2}\right)\eta_0 P_0\,\vec{v} \\
K\eta_3 P_3'\cos\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim -\frac{15}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\eta_0 P_0\,\vec{w} - \left(\frac{15}{2K^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{3}{2}\right)\eta_0 P_0\,\vec{u} \\
K\eta_3 P_3^2\sin 2\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim \frac{30}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\eta_0 P_0\,\vec{w} + \frac{30}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\eta_0 P_0\,\vec{u} + \frac{30}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\eta_0 P_0\,\vec{v} \\
K\eta_3 P_3^2\cos 2\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim \left(\frac{30}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{15}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 15\right)\eta_0 P_0\,\vec{w} - \frac{30}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\eta_0 P_0\,\vec{w} + \frac{30}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\eta_0 P_0\,\vec{u} \\
K\eta_3 P_3^3\sin 3\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim -\frac{90}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\eta_0 P_0\,\vec{u} - \left(\frac{90}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{45}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 45\right)\eta_0 P_0\,\vec{v} \\
K\eta_3 P_3^3\cos 3\varphi\,\overline{OH}\,\nu \sim \frac{90}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\eta_0 P_0\,\vec{v} - \left(\frac{90}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{45}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 45\right)\eta_0 P_0\,\vec{u}
\end{cases}
$$

III Reflexion von allgemeinen Kugelwellen an ebenen Trennflächen

Wie in der Einführung angegeben wurde, handelt es sich darum, die Reflexion von Kugelwellen an der ebenen Trennfläche von zwei Dielektriken zu behandeln, d.h. die Koeffizienten $\alpha_\lambda^{r\lambda}, \beta_\lambda^{r\lambda}, \gamma_\lambda^{r\lambda}, \delta_\lambda^{r\lambda}$ die in den Gleichungen (9) und (10) auftreten auszurechnen.

Wir wollen wie folgt verfahren:

Zuerst rechnen wir die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für $\varepsilon = 1$ $\mu = 0$ und für $\varepsilon = 1$ $\mu = 1$.

Das heißt, wir untersuchen wie sich die von den Quellen:

$$\text{oder } \overrightarrow{\Pi_S^E} = \eta_1 P_1 \overrightarrow{OM}$$

$$\text{oder } \overrightarrow{\Pi_S^E} = \eta_1 P_1' \cos\varphi \overrightarrow{OM}$$

ausgestrahlte Energie an der Trennfläche z = d reflektiert. Dann zeigen wir, wie man die Reflexion der anderen Partialwellen auf die Reflexion der drei ersten elektrischen und magnetischen zurückführen kann.

Wir fangen mit dem vertikalen elektrischen Hertzschen Dipol an:

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \eta_0 P_0 \vec{w}$$

$\vec{w}$ Einheitsvektor der z-Achse. Wir führen die Weylsche Darstellung ein:

$$\eta_0 P_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2 \to \pi/2 - i\infty} e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]} \sin\theta_0 \, d\theta_0 \, d\varphi_0$$

Wir haben also:

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2 \to \pi/2 - i\infty} e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]} \sin\theta_0 \, d\theta_0 \, d\varphi_0 \, \vec{w}$$

aber
$$\vec{\Pi}_S^E = e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]}\,\vec{w}$$

reflektiert sich auf der Trennfläche z = d in:
$$\vec{\Pi}_{es}^E = f_r(\cos\theta_0)\, e^{ikr[-\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)] + iK\cos\theta_0 2d}\,\vec{w}$$

(50) gibt:
$$f_r(\cos\theta_0) = \frac{\cos\theta_0 - n\sqrt{n^2(\cos^2\theta_0-1)+1}}{\cos\theta_0 + n\sqrt{n^2(\cos^2\theta_0-1)+1}}$$

Wir erhalten dann
$$\vec{\Pi}_{es}^E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2 \to \pi/2 - i\infty} f_r(\cos\theta_0)\, e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)] + iK\cos\theta_0 2d} \sin\theta_0\, d\theta_0\, d\varphi_0\,\vec{w}$$

andererseits:
$$e^{ikr[-\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} i^\nu(2\nu+1)\psi_\nu(kr)\left\{(-1)^\nu P_\nu(\cos\theta_0)P_\nu(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{\nu}(-1)^{\nu+m}\frac{(\nu-m)!}{(\nu+m)!}P_\nu^m P_\nu^m \cos m(\varphi-\varphi_0)\right\}$$

Nach Integration nach φ ergibt sich:
$$\vec{\Pi}_{es}^E = \sum_{\nu=0}^{\infty} i^\nu(2\nu+1)(-1)^\nu\psi_\nu(kr)P_\nu(\cos\theta)\int_W f_r(\cos\theta_0)e^{iK\cos\theta_0 2d}P_\nu(\cos\theta_0)\sin\theta_0\, d\theta_0\,\vec{w}$$

anders geschrieben:
$$\vec{\Pi}_{es}^E = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\psi_\nu(kr)P_\nu(\cos\theta)\,\vec{w}$$

mit $a_\nu = (-i)^\nu(2\nu+1)\int_W f_r(\cos\theta_0)e^{iK\cos\theta_0 2d}P_\nu(\cos\theta_0)\sin\theta_0\, d\theta_0$

aber $\vec{\Pi}_S^E = \eta_0 \ell_0\,\vec{w} \sim K\eta_1 P_1 \,\vec{\alpha t}$

und wir wollten α_λ^{10} und β_λ^{10} finden, dazu benutzen wir die Formeln (38), (38) gibt uns für m = o

$$\overrightarrow{\Pi^E} = \psi_r P_r \vec{w}$$

$$\sim \overrightarrow{\Pi^E} = \frac{K}{2r+1} \left[\psi_{r+1} P_{r+1} + \psi_{r-1} P_{r-1} \right] \overrightarrow{oll}$$

Nach Kürzen Vertauschungen

$$\overrightarrow{\Pi^E_{es}} = \sum_{r=o}^{\infty} a_r \psi_r(kr) P_r(\cos\theta) \vec{w}$$

$$\sim \overrightarrow{\Pi^E_{es}} = \sum_{r=1}^{\infty} \psi_r(kr) P_r(\cos\theta) \left[\frac{K}{2r-1} a_{r-1} + \frac{K}{2r+3} a_{r+1} \right] \overrightarrow{oll}$$

Ganz analoge Rechnungen gelten für den vertikalen magnetischen Dipol, aber anstatt $f_r(\cos\theta_0)$ der Formel (5o) tritt der Reflexionsfaktor $\overline{f_r(\cos\theta_0)}$ der Formel (51) auf.

(53)

$$\overrightarrow{\Pi^E_s} = K \eta_1 P_1 \overrightarrow{oll} \sim \eta_0 P_0 \vec{w}$$

reflektiert sich zu

$$\overrightarrow{\Pi^E_{es}} = \sum_{r=o}^{\infty} a_r \psi_r(kr) P_r(\cos\theta) \vec{w}$$

$$\sim = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_\lambda^{10} \psi_r(kr) P_r(\cos\theta) \overrightarrow{oll}$$

mit:

$$a_r = (-i)^r (2r+1) \int_W f_r(\cos\theta_0) e^{ikr\cos\theta_0 z} P_r(\cos\theta_0) \sin\theta_0 d\theta_0$$

und $\alpha_\lambda^{10} = \frac{K}{2\lambda-1} a_{\lambda-1} + \frac{K}{2\lambda+3} a_{\lambda+1}$

$$\overrightarrow{\Pi_s^H} = K\eta_1 \ell_1 \overrightarrow{OH} \sim \eta_0 \ell_0 \vec{w}$$

reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{a_\nu}\, \psi_\nu(kr)\, P_\nu(\cos\theta)\, \vec{w}$$

(54)
$$\sim \sum_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda^{10}\, \psi_\lambda(kr)\, P_\lambda(\cos\theta)\, \overrightarrow{OH}$$

mit:

$$\overline{a_\nu} = (-i)^\nu (2\nu+1) \int_W f_\nu(\cos\theta_0)\, e^{ik\ell\cos\theta_0 2d}\, P_\nu(\cos\theta_0) \sin\theta_0\, d\theta_0$$

und
$$\delta_\lambda^{10} = \frac{K}{2\lambda-1}\, \overline{a_{\lambda-1}} + \frac{K}{2\lambda+3}\, \overline{a_{\lambda+1}}$$

Wir gehen über zum horizontalen elektrischen Dipol

$$\overrightarrow{\Pi_s^E} = - K\eta_1 \ell_1' \sin\varphi\, \overrightarrow{OH} \sim \eta_0 \ell_0 \vec{v}$$

v Einheitsvektor der y-Achse, die Weylsche Darstellung gibt uns:

$$\overrightarrow{\Pi_\sigma^E} = e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]}\, \vec{v}$$

$$\overrightarrow{\Pi_s^E} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]} \sin\theta_0\, d\theta_0\, d\varphi_0\, \vec{v}$$

Spalten wir auf im E-Feld und H-Feld bezüglich der z-Richtung; dazu benutzen wir die Formeln (41 a) und (41 b) und bekommen:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Pi_s^E} = - \dfrac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\, e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]}\, \vec{w} \\ \overrightarrow{\Pi_s^H} = \dfrac{\omega\varepsilon}{K}\, \dfrac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}\, e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]}\, \vec{w} \end{cases}$$

infolgedessen läßt sich der in der Richtung y liegende elektrische Hertzsche Dipol durch die zwei folgenden Hertzschen Vektoren darstellen:

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W \frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\, e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]}\sin\theta_0\, d\theta_0\, d\varphi_0\, \vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = \frac{\omega\varepsilon}{K}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W \frac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}\, e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]}\sin\theta_0\, d\theta_0\, d\varphi_0\, \vec{w}$$

Diese zwei Partialfelder werden an der Ebene z = d einzeln reflektiert:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W f_1(\cos\theta_0)\frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\, e^{ikr[-\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)] + iK\cos\theta_0 2d}\sin\theta_0\, d\theta_0\, d\varphi_0\, \vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W \frac{\omega\varepsilon}{K}\,\overline{f_2(\cos\theta_0)}\,\frac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}\, e^{ikr[-\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)] + iK\cos\theta_0 2d}\sin\theta_0\, d\theta_0\, d\varphi_0\, \vec{w}$$

Wir integrieren nach φ_0 und bekommen:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu}(-1)^{\nu+1}(2\nu+1)\frac{(\nu-1)!}{(\nu+1)!}\psi_\nu(kr)P_\nu^1(\cos\theta)\sin\varphi \times \int_W f_1(\cos\theta_0)e^{iK\cos\theta_0 2d}P_\nu^1(\cos\theta_0)\cos\theta_0\, d\theta_0\, \vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \frac{\omega\varepsilon}{K}\sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu}(2\nu+1)(-1)^{\nu+1}\frac{(\nu-1)!}{(\nu+1)!}\psi_\nu(kr)P_\nu^1(\cos\theta)\cos\varphi \times \int_W \overline{f_2(\cos\theta_0)}\, e^{iK\cos\theta_0 2d}P_\nu^1(\cos\theta_0)\, d\theta_0\, \vec{w}$$

Dann kann man wieder wie oben von parallelen zu radialen Hertzschen Vektoren mit Hilfe der Formeln (38) übergehen. Was den horizontalen Dipol

$$\overrightarrow{\Pi^E} = -K\eta_1 P_1'\cos\varphi\,\overrightarrow{o\mu} \sim \eta_0 P_0\,\vec{u}$$ betrifft,

so ist es klar, daß er sich einfach aus dem Vorhergehenden durch Drehung um $\pi/2$ ergibt.
Die Rechnungen verlaufen ganz analog für die magnetischen Dipole, es werden die Formeln (43) und (44) verwendet, um die ebenen Wellen in E-Feld und H-Feld bezüglich der z Achse unter dem Integralzeichen aufzuspalten. Dann wird jedes Partialfeld an der Ebene z = d einzeln reflektiert.

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = K\psi_1 P_1' \tfrac{\cos}{\sin}\varphi\,\overrightarrow{e_u}\,v - \psi_0 P_0\,\overrightarrow{\tfrac{u}{z}}$$

reflektiert sich in:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Pi_{es}^E} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \psi_\nu(kr) P_\nu'(\cos\theta) \tfrac{\cos}{\sin}\varphi\,\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \psi_\nu(kr) P_\nu'(\cos\theta) \tfrac{\sin}{-\cos}\varphi\,\overrightarrow{w} \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu'' \psi_\nu(kr) P_\nu'(\cos\theta) \tfrac{\cos}{\sin}\varphi\,\overrightarrow{e_u} \\ \Pi_{es}^H = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu'' \psi_\nu(kr) P_\nu'(\cos\theta) \tfrac{-\sin}{\cos}\varphi\,\overrightarrow{e_u} \end{cases}$$

(55)

mit:

$$b_\nu = (-i)^\nu (2\nu+1) \frac{(\nu-1)!}{(\nu+1)!} \int_W f_2(\cos\theta_0)\, e^{iK\cos\theta_0 2d} P_\nu'(\cos\theta_0) \cos\theta_0\, d\theta_0$$

$$c_\nu = -\frac{\omega\varepsilon}{K} (-i)^\nu (2\nu+1) \frac{(\nu-1)!}{(\nu+1)!} \int_W \overline{f_1(\cos\theta_0)}\, e^{iK\cos\theta_0 2d} P_\nu'(\cos\theta_0)\, d\theta_0$$

und.

$$\alpha_\nu'' = \left[-b_{\nu-1} \frac{K(\nu-1)}{\nu(2\nu-1)} - b_{\nu+1} \frac{K(\nu+2)}{(\nu+1)(2\nu+3)} + c_\nu \frac{i\omega\mu_0}{\nu(\nu+1)} \right]$$

$$\beta_\nu'' = \left[\frac{i\omega\varepsilon}{\nu(\nu+1)} b_\nu - c_{\nu-1} \frac{K(\nu-1)}{\nu(2\nu-1)} - c_{\nu+1} \frac{K(\nu+2)}{(\nu+1)(2\nu+3)} \right]$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K\eta_1 P_1' \frac{\cos}{\sin}\varphi\, \overrightarrow{\text{ou}} - \eta_0 P_0 \frac{\vec{u}}{v}$$

reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{b_\nu}\, \psi_\nu(kr)\, P_\nu'(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin}\varphi\, \vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{c_\nu}\, \psi_\nu(kr)\, P_\nu'(\cos\theta) \frac{-\sin}{\cos}\varphi\, \vec{w}$$

oder:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu''\, \psi_\nu(kr)\, P_\nu'(\cos\theta) \frac{-\sin}{\cos}\varphi\, \overrightarrow{\text{ou}}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu''\, \psi_\nu(kr)\, P_\nu'(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin}\varphi\, \overrightarrow{\text{ou}}$$

(56) mit:

$$\overline{b_\nu} = (-i)^\nu (2\nu+1) \frac{\nu-1!}{\nu+1!} \int_W \overline{f_1(\cos\theta_0)}\, e^{iK\cos\theta_0 2d}\, P_\nu'(\cos\theta_0) \cos\theta_0\, d\theta_0$$

$$\overline{c_\nu} = \frac{\omega\mu_0}{K} (-i)^\nu (2\nu+1) \frac{\nu-1!}{\nu+1!} \int_W f_2(\cos\theta_0)\, e^{iK\cos\theta_0 2d}\, P_\nu'(\cos\theta_0)\, d\theta_0$$

und:

$$\gamma_\nu'' = -\overline{c_{\nu-1}} \frac{K(\nu-1)}{\nu(2\nu-1)} - \overline{c_{\nu+1}} \frac{K(\nu+2)}{(\nu+1)(2\nu+3)} - \overline{b_\nu} \frac{i\omega\mu_0}{\nu(\nu+1)}$$

$$\delta_\nu'' = -\frac{i\omega\varepsilon}{\nu(\nu+1)} \overline{c_\nu} - \overline{b_{\nu-1}} \frac{K(\nu-1)}{\nu(2\nu-1)} - \overline{b_{\nu+1}} \frac{K(\nu+2)}{(\nu+1)(2\nu+3)}$$

Schließlich brauchen wir die Koeffizienten

$$a_r \quad \bar{a}_r \quad b_r \quad \bar{b}_r \quad c_r \quad \bar{c}_r$$

$$\text{für } r = 0, 1, 2, \ldots \ldots \infty$$

Wir zeigen jetzt daß keine anderen numerischen Rechnungen nötig sind für die anderen Mieschen Partialwellen, wir können alle Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit Hilfe der Koeffizienten $a_r \; \bar{a}_r \; b_r \; \bar{b}_r \; c_r \; \bar{c}_r$ ausdrücken. Wir zeigen es an Hand eines Beispiels:

Wir legen in den Koordinatenursprung die folgende Quelle, gekennzeichnet durch ihren Hertzschen Vektor:

$$\overrightarrow{\Pi^E} = K \eta_2 \rho_2 \overrightarrow{om}$$

Diese Quelle strahlt; ein Teil der ausgestrahlten Energie wird von der Fläche z = d reflektiert und kommt wieder zum Koordinatenursprung zurück. Wir wollen die Reihenentwicklung der reflektierten Energie nach Multipolen um den Koordinatenursprung erhalten und bemerken an Hand der ersten Äquivalenz (52 d) daß:

$$\overrightarrow{\Pi^E} = K \eta_2 \rho_2 \overrightarrow{om} \; v - \frac{3}{K} \frac{c}{\nu_3} (\eta_0 \rho_0) \overrightarrow{w}$$

Aber (53) zeigt, daß:

$$\overrightarrow{\Pi^E_S} = \eta_0 \rho_0 \overrightarrow{w}$$

sich in $\overrightarrow{\Pi^E_{CS}} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \psi_r(kr) P_r(\cos\theta) \overrightarrow{w}$

reflektiert.

Infolgedessen reflektiert sich

$$\frac{2}{\nu_3} \eta_0 \rho_0 \overrightarrow{w}$$

in $$-\frac{2}{\nu_3} \sum_{r=0}^{\infty} a_r \psi_r(kr) P_r(\cos\theta) \overrightarrow{w}$$

Wie einfache Überlegungen über die Reflexion zeigen. Aber die Gleichungen (16) bis (19) zeigen andererseits, daß:

$$-\frac{2}{\partial z}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \psi_\nu(kr)\, P_\nu(\cos\theta)\,\vec{w}$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{K(\nu+1)\,a_{\nu+1}}{2\nu+3} - \frac{K\nu\, a_{\nu-1}}{2\nu-1}\right]\psi_\nu(kr)\, P_\nu(\cos\theta)\,\vec{w}$$

Endlich gehen wir mit Hilfe der Formeln (38) zu radialen Hertzschen Vektoren über. Wir schreiben also:

(57)

$$\overrightarrow{\Pi^E_S} = K\eta_2 P_\nu \overrightarrow{OM}\, v - \frac{3}{K}\frac{2}{\partial z}(\chi_0 P_\nu)\,\vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi^E_{es}} = 3\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{(\nu+1)\,a_{\nu+1}}{2\nu+3} - \nu\frac{a_{\nu-1}}{2\nu-1}\right]\psi_\nu P_\nu\,\vec{w}$$

$$v\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^{20}_\nu\,\psi_\nu(kr)\,P_\nu(\cos\theta)\,\overrightarrow{OM}$$

mit:

$$\alpha^{20}_\nu = 3K\left\{\frac{(\nu+2)\,a_{\nu+2}}{(2\nu+3)(2\nu+5)} - \left[\frac{\nu+1}{2\nu+3} - \frac{\nu}{2\nu-1}\right]\frac{a_\nu}{2\nu+1} - \frac{(\nu-1)\,a_{\nu-2}}{(2\nu-1)(2\nu-3)}\right\}$$

a_ν oben wie (53) definiert

Für die anderen Mieschen partiellen Wellen verlaufen die Rechnungen ganz analog.

1.) Man berücksichtigt die Äquivalenzen (52 d) und (52 e).

2.) Eine Differentiationsprozedur angewandt auf die Entwicklungen (53) bis (56) wird durchgeführt und dabei die Formeln (16) bis (19) verwendet.

3.) Endlich werden die Äquivalenzen (38) verwendet um zu radialen Hertzschen Vektoren zu gelangen. Die Rechnungen werden sehr schnell äußerst langwierig beim Wachsen der Ordnung der Mieschen Partialwellen. Wir geben nur die Ergebnisse:

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K \eta_2 P_2 \overrightarrow{e_H}$$

reflektiert nach m:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \sum_{r=0}^{\infty} \delta_r^{20} \psi_r(kr_2) P_r(\cos\theta) \overrightarrow{e_H}$$

(58)

$$\delta_r^{20} = 3K \left[\frac{(r+2)\,\overline{a_{r+2}}}{(2r+3)(2r+5)} - \left[\frac{r+1}{2r+3} - \frac{r}{2r-1} \right] \frac{\overline{a_r}}{2r+1} - \frac{(r-1)\,\overline{a_{r-2}}}{(2r-1)(2r-3)} \right]$$

$\overline{a_r}$ wie definiert

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = K \eta_2 P_2' \frac{\sin}{\cos} \varphi \overrightarrow{e_H}$$

reflektiert nach m:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^{21} \psi_r(kr_2) P_r(\cos\theta) \frac{\sin}{\cos} \varphi \overrightarrow{e_H}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r^{21} \psi_r(kr_2) P_r(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin} \varphi \overrightarrow{e_H}$$

(59)

$$\alpha_r^{21} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3K(r-1)}{r(2r-1)} \left[\frac{a_r}{2r+1} + \frac{a_{r-2}}{2r-3} - \frac{r+1}{2r+1} t_r + \frac{r-2}{2r-3} t_{r-2} \right] \\ + \frac{3K(r+2)}{(r+1)(2r+3)} \left[\frac{a_{r+2}}{2r+5} + \frac{a_r}{2r+1} - \frac{r+3}{2r+5} t_{r+2} + \frac{r}{2r+1} t_r \right] \\ \frac{i\omega\mu_0 3}{r(r+1)} \left[\frac{(r+2)\,C_{r+1}}{2r+3} - \frac{(r-1)\,C_{r-1}}{2r-1} \right] \end{array} \right\}$$

$$\beta_r^{21} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{i\omega\varepsilon}{r(r+1)} 3 \left[\frac{a_{r+1}}{2r+3} + \frac{a_{r-1}}{2r-1} - \frac{r+2}{2r+3} t_{r+1} + \frac{r-1}{2r-1} t_{r-1} \right] \\ \frac{K(r-1)3}{r(2r-1)} \left[\frac{(r+1)}{2r+1} C_r - \frac{(r-2)\,C_{r-2}}{2r-3} \right] \\ \frac{K(r+2)3}{(r+1)(2r+3)} \frac{(r+3)\,C_{r+2}}{2r+5} - \frac{r\,C_r}{2r+1} \end{array} \right\}$$

$$\vec{\Pi}_s^H = K\,\eta_2\,P_2^1\,\frac{\sin}{\cos}\varphi\;\vec{OM}$$

reflektiert sich in.

$$\vec{\Pi}_{es}^E = \sum_{r=1}^{\infty}\gamma_r^{21}\,\psi_r(kr)\,P_r^1(\cos\theta)\,\frac{-\cos}{\sin}\varphi\;\vec{OM}$$

$$\vec{\Pi}_{es}^H = \sum_{r=1}^{\infty}\delta_r^{21}\,\psi_r(kr)\,P_r^1(\cos\theta)\,\frac{\sin}{\cos}\varphi\;\vec{OM}$$

(60)

$$\gamma_r^{21} = \left\{\begin{aligned} & -\frac{i\omega\mu_0 3}{r(r+1)}\left[\frac{\bar{a}_{r+1}}{2r+3}+\frac{\bar{a}_{r-1}}{2r-1}-\frac{r+2}{2r+3}\bar{b}_{r+1}+\frac{r-1}{2r-1}\bar{b}_{r-1}\right] \\ & \frac{K(r-1)3}{r(2r-1)}\left[\frac{(r+1)}{2r+1}\bar{c}_r-\frac{(r-2)}{2r-3}\bar{c}_{r-2}\right] \\ & \frac{K(r+2)3}{(r+1)(2r+3)}\left[\frac{(r+3)\bar{c}_{r+2}}{2r+5}-\frac{r\,c_r}{2r+1}\right] \end{aligned}\right\}$$

$$\delta_r^{21} = \left\{\begin{aligned} & \frac{3K(r-1)}{r(2r-1)}\left[\frac{\bar{a}_r}{2r+1}+\frac{\bar{a}_{r-2}}{2r-3}-\frac{r+1}{2r+1}\bar{b}_r+\frac{r-2}{2r-3}\bar{b}_{r-2}\right] \\ & \frac{3K(r+2)}{(r+1)(2r+3)}\left[\frac{a_{r+2}}{2r+5}+\frac{a_r}{2r+1}-\frac{r+3}{2r+5}\bar{b}_{r+2}+\frac{r}{2r+1}\bar{b}_r\right] \\ & -\frac{i\omega\varepsilon 3}{r(r+1)}\left[\frac{(r+2)\bar{c}_{r+1}}{2r+3}-\frac{(r-1)\bar{c}_{r-1}}{2r-1}\right] \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{\Pi}_s^E = K\,\eta_2\,P_2^2\,\frac{\sin}{\cos}2\varphi\;\vec{OM}$$

reflektiert sich in

$$\vec{\Pi}_{es}^E = \sum_{r=2}^{\infty}\psi_r(kr)\,P_r^2\,\frac{\sin}{\cos}2\varphi\left\{-\frac{6K(r-2)}{r(2r-1)}\left[\frac{b_r}{2r+1}+\frac{b_{r-2}}{2r-3}\right]+\right.$$

(61a)

$$\left.-\frac{6K(r+3)}{(r+1)(2r+3)}\left[\frac{b_{r+2}}{2r+5}+\frac{b_r}{2r+1}\right]+\frac{12\,i\omega\mu_0}{r(r+1)}\left[\frac{c_{r+1}}{2r+3}+\frac{c_{r-1}}{2r-1}\right]\right\}\vec{OM}$$

$$\vec{\Pi}_{es}^H = \sum_{r=2}^{\infty}\psi_r(kr)\,P_r^2\,\frac{-\cos}{\sin}2\varphi\left\{\frac{6K(r-2)}{r(2r-1)}\left[\frac{c_r}{2r+1}+\frac{c_{r-2}}{2r-3}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{6K(r+3)}{(r+1)(2r+3)}\left[\frac{c_{r+2}}{2r+5}+\frac{c_r}{2r+1}\right]-\frac{12\,i\omega\varepsilon}{r(r+1)}\left[\frac{b_{r+1}}{2r+3}+\frac{b_{r-1}}{2r-1}\right]\right\}\vec{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K\eta_2 P_2^2 \sin\cos 2\varphi \;\overrightarrow{CM}$$

reflektiert sich zu:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \sum_{r=2}^{\infty} \psi_r(k_2) P_r^2 \sin\cos 2\varphi \left\{ -\frac{6K(r-2)}{r(2r-1)} \left[\frac{\overline{b_r}}{2r+1} + \frac{\overline{b_{r-2}}}{2r-3} \right] + \right.$$

$$\left. - \frac{6K(r+3)}{(r+1)(2r+3)} \left[\frac{\overline{b_{r+2}}}{2r+5} + \frac{\overline{b_r}}{2r+1} \right] - \frac{12\omega\varepsilon}{r(r+1)} \left[\frac{\overline{c_{r+1}}}{2r+3} + \frac{\overline{c_{r-1}}}{2r-1} \right] \right\} \overrightarrow{CM} \qquad (81b)$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \sum_{r=2}^{\infty} \psi_r(k_2) P_r^2 \cos\sin 2\varphi \left\{ \frac{6K(r-2)}{r(2r-1)} \left[\frac{\overline{c_r}}{2r+1} + \frac{\overline{c_{r-2}}}{2r-3} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{6K(r+3)}{(r+1)(2r+3)} \left[\frac{\overline{c_{r+2}}}{2r+5} + \frac{\overline{c_r}}{2r+1} \right] + \frac{12\omega\mu_0}{r(r+1)} \left[\frac{\overline{b_{r+1}}}{2r+3} + \frac{\overline{b_{r-1}}}{2r-1} \right] \right\} \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = K\eta_3 P_2 \;\overrightarrow{OM} \quad \text{reflektiert sich zu:}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \sum_{r=0}^{\infty} \psi_r P_r \overrightarrow{OM} \left\{ \begin{array}{l} \frac{K}{2r-1} \left[\frac{15}{2} \frac{r(r+1)}{(2r+1)(2r+3)} a_{r+1} - \frac{15}{2} \left(\frac{r^2}{2r+1} - \frac{(r-1)^2}{2r-3} \right) \frac{a_{r-1}}{2r-1} + \frac{15}{2} \frac{(r-1)(r-2)}{(2r-3)(2r-5)} a_{r-3} \right] \\ \frac{K}{2r+3} \left[\frac{15}{2} \frac{(r+2)(r+3)}{(2r+5)(2r+7)} a_{r+3} - \frac{15}{2} \left(\frac{(r+3)^2}{2r+5} + \frac{(r+1)^2}{2r+1} \right) \frac{a_{r+1}}{2r+3} + \frac{15}{2} \frac{r(r+1)}{(2r+1)(2r-1)} a_{r-1} \right] \end{array} \right\} \qquad (82a)$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K\eta_3 P_3 \;\overrightarrow{OM}$$

reflektiert sich zu:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \sum_{r=0}^{\infty} \psi_r P_r \overrightarrow{OM} \left\{ \begin{array}{l} \frac{K}{2r-1} \left[\frac{15}{2} \frac{r(r+1)\overline{a_{r+1}}}{(2r+1)(2r+3)} - \frac{15}{2} \left(\frac{r^2}{2r+1} - \frac{(r-1)^2}{2r-3} \right) \frac{\overline{a_{r-1}}}{2r-1} + \frac{15}{2} \frac{(r-1)(r-2)}{(2r-3)(2r-5)} \overline{a_{r-3}} \right] \\ \frac{K}{2r+3} \left[\frac{15}{2} \frac{(r+2)(r+3)\overline{a_{r+3}}}{(2r+5)(2r+7)} - \frac{15}{2} \left(\frac{(r+3)^2}{2r+5} + \frac{(r+1)^2}{2r+1} \right) \overline{a_{r+1}} + \frac{15}{2} \frac{r(r+1)\overline{a_{r-1}}}{(2r+1)(2r-1)} \right] \end{array} \right\} \qquad (82b)$$

$$\overrightarrow{\Pi_s^E} = K\, \eta_3\, P_3^1 \,\tfrac{\sin}{\cos}\varphi\, \overrightarrow{OM} \quad \text{reflektiert sich in:}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \psi_\nu P_\nu^1 \,\tfrac{\sin}{\cos}\varphi\, \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \psi_\nu P_\nu^1 \,\tfrac{-\cos}{\sin}\varphi\, \overrightarrow{OM}$$

a)

$$A_\nu = \left\{ \begin{aligned}
&\frac{K(\nu-1)}{\nu(2\nu-1)} \left\{ \begin{aligned} &15\left[\frac{(\nu+1)}{2\nu+1}\left(\frac{a_{\nu+1}}{2\nu+3} + \frac{a_{\nu-1}}{2\nu-1}\right) - \frac{\nu-2}{2\nu-3}\left(\frac{a_{\nu-1}}{2\nu-1} + \frac{a_{\nu-3}}{2\nu-5}\right)\right] - \frac{3}{2}\, b_{\nu-1} \\ &-\frac{15}{2}\left[\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+1)(2\nu+3)} b_{\nu+1} - \frac{b_{\nu-1}}{2\nu-1}\left(\frac{(\nu-1)(\nu+1)}{2\nu+1} + \frac{\nu(\nu-2)}{2\nu-3}\right) + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{(2\nu-3)(2\nu-5)}\, b_{\nu-3}\right] \end{aligned} \right\} \\
&\frac{K(\nu+2)}{(\nu+1)(2\nu+3)} \left\{ \begin{aligned} &15\left[\frac{\nu+3}{2\nu+5}\left(\frac{a_{\nu+3}}{2\nu+7} + \frac{a_{\nu+1}}{2\nu+3}\right) - \frac{\nu}{\nu+1}\left(\frac{a_{\nu+1}}{2\nu+3} + \frac{a_{\nu-1}}{2\nu-1}\right)\right] - \frac{3}{2}\, b_{\nu+1} \\ &-\frac{15}{2}\left[\frac{(\nu+3)(\nu+4)}{(2\nu+5)(2\nu+7)} b_{\nu+3} - \frac{b_{\nu+1}}{2\nu+3}\left(\frac{(\nu+1)(\nu+3)}{2\nu+5} + \frac{\nu(\nu+2)}{2\nu+1}\right) + \frac{\nu(\nu-1)\cdot b_{\nu-1}}{(2\nu+1)(2\nu-1)}\right] \end{aligned} \right\} \\
&\frac{i\omega\mu_0}{\nu(\nu+1)} \left\{ \frac{15}{2}\left[\frac{(\nu+2)(\nu+3)}{(2\nu+3)(2\nu+5)} c_{\nu+2} - \frac{c_\nu}{2\nu+1}\left(\frac{\nu(\nu+2)}{2\nu+3} + \frac{(\nu-1)(\nu+1)}{2\nu-1}\right) + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{(2\nu+1)(2\nu-3)}\, c_{\nu-2}\right] + \frac{3}{2}\, c_\nu \right\}
\end{aligned} \right.$$

$$B_\nu = \left\{ \begin{aligned}
&\frac{K(\nu-1)}{\nu(2\nu-1)} \left[\frac{15}{2}\left[\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+1)(2\nu+3)} c_{\nu+1} - \frac{c_{\nu-1}}{2\nu-1}\left(\frac{(\nu-1)(\nu+1)}{2\nu+1} + \frac{\nu(\nu-2)}{2\nu-3}\right) + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{(2\nu-1)(2\nu-5)}\, c_{\nu-3}\right] + \frac{3}{2}\, c_{\nu-1}\right] \\
&\frac{K(\nu+2)}{(\nu+1)(2\nu+3)} \left[\frac{15}{2}\left[\frac{(\nu+3)(\nu+4)}{(2\nu+5)(2\nu+7)} c_{\nu+3} - \frac{c_{\nu+1}}{2\nu+3}\left(\frac{(\nu+1)(\nu+3)}{2\nu+5} + \frac{\nu(\nu+2)}{2\nu+1}\right) + \frac{\nu(\nu-1)}{(2\nu+3)(2\nu-1)}\, c_{\nu-1}\right] + \frac{3}{2}\, c_{\nu+1}\right] \\
&-i\omega\varepsilon \left\{ \begin{aligned} &15\left[\frac{(\nu+2)}{2\nu+3}\left(\frac{a_{\nu+2}}{2\nu+5} + \frac{a_\nu}{2\nu+1}\right) - \frac{\nu-1}{2\nu-1}\left(\frac{a_\nu}{2\nu+1} + \frac{a_{\nu-2}}{2\nu-3}\right)\right] - \frac{3}{2}\, b_\nu \\ &-\frac{15}{2}\left[\frac{(\nu+2)(\nu+3)}{(2\nu+3)(2\nu+5)} b_{\nu+2} - \frac{b_\nu}{2\nu+1}\left(\frac{\nu(\nu+2)}{2\nu+3} + \frac{(\nu-1)(\nu+1)}{2\nu-1}\right) + \frac{(\nu-1)(\nu-2)\, b_{\nu-2}}{(2\nu+1)(2\nu-3)}\right] \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \right.$$

$$\vec{\Pi}_s^H = K \eta_3 P_3' \tfrac{\sin}{\cos}\varphi \, \vec{c\ell} \quad \text{[illegible]}$$

$$\vec{\Pi}_{es}^H = \sum_{r=1}^{\infty} A_r \psi_r P_r' \tfrac{\sin}{\cos}\varphi \, \vec{\imath\ell}$$

$$\vec{\Pi}_{es}^E = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \psi_r P_r' \, {-\tfrac{\cos}{\sin}}\varphi \, \vec{c\ell}$$

(38)

$$A_r = \left\{ \begin{aligned}
&\frac{K(r-1)}{r(2r-1)} \left\{ \begin{aligned} &15\left[\frac{(r+1)}{2r+1}\left(\frac{\bar a_{r+1}}{2r+3} + \frac{\bar a_{r-1}}{2r-1}\right) - \frac{r-2}{2r-3}\left(\frac{\bar a_{r-1}}{2r-1} + \frac{\bar a_{r-3}}{2r-5}\right)\right] - \frac{3}{2}\bar b_{r-1} \\
&- \frac{15}{2}\left[\frac{(r+1)(r+2)}{(2r+1)(2r+3)}\bar b_{r+1} - \frac{\bar b_{r-1}}{2r-1}\left(\frac{(r-1)(r+1)}{2r+1} + \frac{r(r-2)}{2r-3}\right) + \frac{(r-2)(r-3)}{(2r-3)(2r-5)}\bar b_{r-3}\right] \end{aligned} \right\} \\
&\frac{K(r+2)}{(r+1)(2r+3)} \left\{ \begin{aligned} &15\left[\frac{r+3}{2r+5}\left(\frac{\bar a_{r+3}}{2r+7} + \frac{\bar a_{r+1}}{2r+3}\right) - \frac{r}{2r+1}\left(\frac{\bar a_{r+1}}{2r+3} + \frac{\bar a_{r-1}}{2r-1}\right)\right] - \frac{3}{2}\bar b_{r+1} \\
&- \frac{15}{2}\left[\frac{(r+3)(r+4)}{(2r+5)(2r+7)}\bar b_{r+3} - \frac{\bar b_{r+1}}{2r+3}\left(\frac{(r+1)(r+3)}{2r+5} + \frac{r(r+2)}{2r+1}\right) + \frac{r(r-1)}{(2r+1)(2r-1)}\bar b_{r-1}\right] \end{aligned} \right\} \\
&- \frac{1w\varepsilon}{r(r+1)} \left\{ \frac{15}{2}\left[\frac{(r+2)(r+3)}{(2r+3)(2r+5)}\bar c_{r+2} - \frac{\bar c_r}{2r+1}\left(\frac{r(r+2)}{2r+3} + \frac{(r-1)(r+1)}{2r-1}\right) + \frac{(r-1)(r-2)}{(2r+1)(2r-3)}\bar c_{r-2}\right] + \frac{3}{2}\bar c_r \right\}
\end{aligned} \right\}$$

$$B_r = \left\{ \begin{aligned}
&\frac{K(r-1)}{r(2r-1)} \left[\frac{15}{2}\left[\frac{(r+1)(r+2)}{(2r+1)(2r+3)}\bar c_{r+1} - \frac{\bar c_{r-1}}{2r-1}\left(\frac{(r-1)(r+1)}{2r+1} + \frac{r(r-2)}{2r-3}\right) + \frac{(r-2)(r-3)}{(2r-1)(2r-3)}\bar c_{r-3}\right] + \frac{3}{2}\bar c_{r-1} \right] \\
&\frac{K(r+2)}{(r+1)(2r+3)} \left[\frac{15}{2}\left[\frac{(r+3)(r+4)}{(2r+5)(2r+7)}\bar c_{r+3} - \frac{\bar c_{r+1}}{2r+3}\left(\frac{(r+1)(r+3)}{2r+5} + \frac{r(r+2)}{2r+1}\right) + \frac{r(r-1)}{(2r+3)(2r-1)}\bar c_{r-1}\right] + \frac{3}{2}\bar c_{r+1} \right] \\
&- 1w\mu_c \left\{ \begin{aligned} &15\left[\frac{(r+2)}{2r+3}\left(\frac{\bar a_{r+2}}{2r+5} + \frac{\bar a_r}{2r+1}\right) - \frac{r-1}{2r-1}\left(\frac{\bar a_r}{2r+1} + \frac{\bar a_{r-2}}{2r-3}\right)\right] - \frac{3}{2}\bar b_r \\
&- \frac{15}{2}\left[\frac{(r+2)(r+3)}{(2r+3)(2r+5)}\bar b_{r+2} - \frac{\bar b_r}{2r+1}\left(\frac{r(r+2)}{2r+3} + \frac{(r-1)(r+1)}{2r-1}\right) + \frac{(r-1)(r-2)}{(2r-1)(2r-3)}\bar b_{r-2}\right] \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \right\}$$

$$\overrightarrow{\Pi_i^E} = K\gamma_3 P_3^2 \tfrac{\sin}{\cos} 2\varphi \, \vec{e_x}$$ reflektiert sich in

$$\overrightarrow{\Pi_{is}^E} = \sum_{r=2}^{\infty} A_r \psi_r P_r^2 \tfrac{\sin}{\cos} 2\varphi \, \vec{e_x}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{is}^H} = \sum_{r=2}^{\infty} B_r \psi_r P_r^2 \tfrac{-\cos}{\sin} 2\varphi \, \vec{e_x}$$

a)

$$A_r = \left\{ \begin{aligned} & \frac{K(r-2)}{r(2r-1)} \left\{ \begin{aligned} & 15\left[\frac{1}{2r+1}\left(\frac{a_{r+1}}{2r+3} + \frac{a_{r-1}}{2r-1}\right) + \frac{1}{2r-3}\left(\frac{a_{r-1}}{2r-1} + \frac{a_{r-3}}{2r-5}\right)\right] \\ & 30\left[\frac{1}{2r+1}\left(\frac{(r+2)\,b_{r+1}}{2r+3} - \frac{(r-1)\,b_{r-1}}{2r-1}\right) + \frac{1}{2r-3}\left(\frac{r\,b_{r-1}}{2r-1} - \frac{r-3}{2r-5}\,b_{r-3}\right)\right] \end{aligned} \right\} \\ & \frac{K(r+3)}{(r+1)(2r+3)} \left\{ \begin{aligned} & 15\left[\frac{1}{2r+5}\left(\frac{a_{r+3}}{2r+7} + \frac{a_{r+1}}{2r+3}\right) + \frac{1}{2r+1}\left(\frac{a_{r+1}}{2r+3} + \frac{a_{r-1}}{2r-1}\right)\right] \\ & 30\left[\frac{1}{2r+5}\left(\frac{(r+4)\,b_{r+3}}{2r+7} - \frac{(r+1)\,b_{r+1}}{2r+3}\right) + \frac{1}{2r+1}\left(\frac{r+2}{2r+3}\,b_{r+1} - \frac{r-1}{2r-1}\,b_{r-1}\right)\right] \end{aligned} \right\} \\ & -\frac{6C\, i\omega\mu_0}{r(r+1)} \left[\frac{(r+3)\,c_{r+1}}{(2r+3)(2r+5)} - \frac{c_{r-1}}{2r-1}\left(\frac{r-1}{2r+1} - \frac{r}{2r-3}\right) - \frac{(r-3)\,c_{r-3}}{(2r-3)(2r-5)}\right] \end{aligned} \right\}$$

$$B_r = \left\{ \begin{aligned} & \frac{K(r-2)}{r(2r-1)} \left[-30\left[\frac{(r+2)\,c_{r+1}}{(2r+1)(2r+3)} - \frac{c_{r-1}}{2r-1}\left(\frac{r-1}{2r+1} - \frac{r}{2r-3}\right) - \frac{(r-3)\,c_{r-3}}{(2r-3)(2r-5)}\right]\right] \\ & \frac{K(r+3)}{(r+1)(2r+3)} \left[-30\left[\frac{(r+2)\,c_{r+1}}{(2r+1)(2r+3)} - \frac{c_{r-1}}{2r-1}\left(\frac{r-1}{2r+1} - \frac{r}{2r-3}\right) - \frac{(r-3)\,c_{r-3}}{(2r-3)(2r-5)}\right]\right] \\ & \frac{\cdot i\,C\,\varepsilon}{r(r+1)} \left\{ \begin{aligned} & 15\left[\frac{1}{2r+3}\left(\frac{a_{r+2}}{2r+5} + \frac{a_r}{2r+1}\right) + \frac{1}{2r-1}\left(\frac{a_r}{2r+1} + \frac{a_{r-2}}{2r-3}\right)\right] \\ & 30\left[\frac{1}{2r+3}\left(\frac{(r+2)\,b_{r+2}}{2r+5} - \frac{r\,b_r}{2r+1}\right) + \frac{1}{2r-1}\left(\frac{(r+1)\,b_r}{2r+1} - \frac{(r-2)}{2r-3}\,b_{r-2}\right)\right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K \cdot \Pi_3 \, P_3^i \, {}^{\sin}_{\cos} \, i\varphi \, \overrightarrow{cM} \quad \text{ufuktrit rich mi.}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \sum_{r=2}^{\infty} A_r \, \Psi_r \, P_r^2 \, {}^{\sin}_{\cos} \, 2\varphi \, \overrightarrow{cM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \sum_{r=2}^{\infty} B_r \, \Psi_r \, P_r^2 \, {}^{-\cos}_{\sin} \, 2\varphi \, \overrightarrow{cM}$$

(44)

$$A_r = \begin{cases} \dfrac{K(r-2)}{r(2r-1)} \begin{Bmatrix} \cdot 15 \left[\dfrac{1}{2r+1} \left(\dfrac{\overline{a_{r+1}}}{2r+3} + \dfrac{\overline{a_{r-1}}}{2r-1} \right) + \dfrac{1}{2r-3} \left(\dfrac{\overline{a_{r-1}}}{2r-1} + \dfrac{\overline{a_{r-3}}}{2r-5} \right) \right] \\ 30 \left[\dfrac{1}{2r+1} \left(\dfrac{(r+2)\overline{f_{r+1}}}{2r+3} - \dfrac{(r-1)\overline{f_{r-1}}}{2r-1} \right) + \dfrac{1}{2r-3} \left(\dfrac{r \cdot \overline{f_{r-1}}}{2r-1} - \dfrac{(r-3)}{2r-5} \overline{f_{r-3}} \right) \right] \end{Bmatrix} \\ \\ \dfrac{K(r+3)}{(r+1)(2r+3)} \begin{Bmatrix} 15 \left[\dfrac{1}{2r+5} \left(\dfrac{\overline{a_{r+3}}}{2r+7} + \dfrac{\overline{a_{r+1}}}{2r+3} \right) + \dfrac{1}{2r+1} \left(\dfrac{\overline{a_{r+1}}}{2r+3} + \dfrac{\overline{a_{r-1}}}{2r-1} \right) \right] \\ 30 \left[\dfrac{1}{2r+5} \left(\dfrac{(r+4)\overline{f_{r+3}}}{2r+7} - \dfrac{(r+1)\overline{f_{r+1}}}{2r+3} \right) + \dfrac{1}{2r+1} \left(\dfrac{r+2}{2r+3} \overline{f_{r+1}} - \dfrac{r-1}{2r-1} \overline{f_{r-1}} \right) \right] \end{Bmatrix} \\ \\ \dfrac{60 \, i \omega \varepsilon}{r(r+1)} \left[\dfrac{(r+3)\overline{C_{r+1}}}{(2r+3)(2r+5)} - \dfrac{\overline{C_{r-1}}}{2r-1} \left(\dfrac{r-1}{2r+1} - \dfrac{r}{2r-3} \right) - \dfrac{(r-3)\overline{C_{r-3}}}{(2r-3)(2r-5)} \right] \end{cases}$$

$$B_r = \begin{cases} \dfrac{K(r-2)}{r(2r-1)} \left[-30 \left[\dfrac{(r+2)\overline{C_{r+1}}}{(2r+1)(2r+3)} - \dfrac{\overline{C_{r-1}}}{2r-1} \left(\dfrac{r-1}{2r+1} - \dfrac{r}{2r-3} \right) - \dfrac{(r-3)\overline{C_{r-3}}}{(2r-3)(2r-5)} \right] \right] \\ \\ \dfrac{K(r+3)}{(r+1)(2r+3)} \left[-30 \left[\dfrac{(r+2)\overline{C_{r+1}}}{(2r+1)(2r+3)} - \dfrac{\overline{C_{r-1}}}{2r-1} \left(\dfrac{r-1}{2r+1} - \dfrac{r}{2r-3} \right) - \dfrac{(r-3)\overline{C_{r-3}}}{(2r-3)(2r-5)} \right] \right] \\ \\ -\dfrac{2 \, i \omega \mu}{r(r+1)} \begin{Bmatrix} 15 \left[\dfrac{1}{2r+3} \left(\dfrac{\overline{a_{r+2}}}{2r+5} + \dfrac{\overline{a_r}}{2r+1} \right) + \dfrac{1}{2r-1} \left(\dfrac{\overline{a_r}}{2r+1} + \dfrac{\overline{a_{r-2}}}{2r-3} \right) \right] \\ 30 \left[\dfrac{1}{2r+3} \left(\dfrac{(r+3)\overline{f_{r+2}}}{2r+5} - \dfrac{r \overline{f_r}}{2r+1} \right) + \dfrac{1}{2r-1} \left(\dfrac{(r+1)\overline{f_r}}{2r+1} - \dfrac{(r-2)\overline{f_{r-2}}}{2r-3} \right) \right] \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{1S}^{E}} = K\,\psi_3\,\rho_3^3\,\frac{\sin}{\cos}\,3\varphi\;\overrightarrow{cal}$$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{\rho S}^{E}} = \sum_{r=3}^{\infty} A_r\,\psi_3\,\rho_r^3\,\frac{\sin}{\cos}\,3\varphi\;\overrightarrow{cal}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{\rho S}^{H}} = \sum_{r=3}^{\infty} B_r\,\psi_3\,\rho_r^3\,-\frac{\cos}{\sin}\,3\varphi\;\overrightarrow{cal}$$

$$A_r = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{45K(r-3)}{r(2r-1)}\left[\frac{1}{2r+1}\left(\frac{1}{2r+3}+\frac{1}{2r-1}\right)+\frac{1}{2r-3}\left(\frac{1}{2r-1}+\frac{1}{2r-5}\right)\right] \\ -\frac{45K(r+4)}{(r+1)(2r+3)}\left[\frac{1}{2r+5}\left(\frac{1}{2r+7}+\frac{1}{2r+3}\right)+\frac{1}{2r+1}\left(\frac{1}{2r+3}+\frac{1}{2r-1}\right)\right] \\ \frac{3\times 45\times 1\,w\mu_0}{r(r+1)}\left[\frac{1}{2r+3}\left(\frac{C_{r+2}}{2r+5}+\frac{C_r}{2r+1}\right)+\frac{1}{2r-1}\left(\frac{C_r}{2r+1}+\frac{C_{r-2}}{2r-3}\right)\right] \end{array} \right\}$$

(15a)

$$B_r = \left\{ \begin{array}{l} \frac{45K(r-3)}{r(2r-1)}\left[\frac{1}{2r+1}\left(\frac{C_{r+1}}{2r+3}+\frac{C_{r-1}}{2r-1}\right)+\frac{1}{2r-3}\left(\frac{C_{r-1}}{2r-1}+\frac{C_{r-3}}{2r-5}\right)\right] \\ \frac{45K(r+4)}{(r+1)(2r+3)}\left[\frac{1}{2r+5}\left(\frac{C_{r+3}}{2r+7}+\frac{C_{r+1}}{2r+3}\right)+\frac{1}{2r+1}\left(\frac{C_{r+1}}{2r+3}+\frac{C_{r-1}}{2r-1}\right)\right] \\ -\frac{3\times 45\times 6\varepsilon}{r(r+1)}\left[\frac{1}{2r+3}\left(\frac{1}{2r+5}+\frac{1}{2r+1}\right)+\frac{1}{2r-1}\left(\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2r-3}\right)\right] \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{\Pi_s^H} = K\, Y_3\, P_3^3 \, {}^{\sin}_{\cos} 3\varphi \, \overrightarrow{c_m} \quad \text{reflektiert sich nicht.}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \sum_{r=3}^{\infty} A_r\, Y_3\, P_r^3 \, {}^{\sin}_{\cos} 3\varphi \, \overrightarrow{c_m}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \sum_{r=3}^{\infty} B_r\, Y_3\, P_r^3 \, {}^{-\cos}_{\ \sin} 3\varphi \, \overrightarrow{c_m}$$

$$A_r = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{45K(r-3)}{r(2r-1)} \left[\dfrac{1}{2r+1} \left(\dfrac{\overline{I_{r+1}}}{2r+3} + \dfrac{\overline{I_{r-1}}}{2r-1} \right) + \dfrac{1}{2r-3} \left(\dfrac{\overline{I_{r-1}}}{2r-1} + \dfrac{\overline{I_{r-3}}}{2r-5} \right) \right] \\ \\ -\dfrac{45K(r+4)}{(r+1)(2r+3)} \left[\dfrac{1}{2r+5} \left(\dfrac{\overline{I_{r+3}}}{2r+7} + \dfrac{\overline{I_{r+1}}}{2r+3} \right) + \dfrac{1}{2r+1} \left(\dfrac{\overline{I_{r+1}}}{2r+3} + \dfrac{\overline{I_{r-1}}}{2r-1} \right) \right] \\ \\ -\dfrac{3 \times 45\, i\omega\varepsilon}{r(r+1)} \left[\dfrac{1}{2r+3} \left(\dfrac{\overline{C_{r+2}}}{2r+5} + \dfrac{\overline{C_r}}{2r+1} \right) + \dfrac{1}{2r-1} \left(\dfrac{\overline{C_r}}{2r+1} + \dfrac{\overline{C_{r-2}}}{2r-3} \right) \right] \end{array} \right\}$$

(65t)

$$B_r = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{45K(r-3)}{r(2r-1)} \left[\dfrac{1}{2r+1} \left(\dfrac{\overline{C_{r+1}}}{2r+3} + \dfrac{\overline{C_{r-1}}}{2r-1} \right) + \dfrac{1}{2r-3} \left(\dfrac{\overline{C_{r-1}}}{2r-1} + \dfrac{\overline{C_{r-3}}}{2r-5} \right) \right] \\ \\ \dfrac{45K(r+4)}{(r+1)(2r+3)} \left[\dfrac{1}{2r+5} \left(\dfrac{\overline{C_{r+3}}}{2r+7} + \dfrac{\overline{C_{r+1}}}{2r+3} \right) + \dfrac{1}{2r+1} \left(\dfrac{\overline{C_{r+1}}}{2r+3} + \dfrac{\overline{C_{r-1}}}{2r-1} \right) \right] \\ \\ \dfrac{3 \times 45\, i\omega\mu}{r(r+1)} \left[\dfrac{1}{2r+3} \left(\dfrac{\overline{I_{r+2}}}{2r+5} + \dfrac{\overline{I_r}}{2r+1} \right) + \dfrac{1}{2r-1} \left(\dfrac{\overline{I_r}}{2r+1} + \dfrac{\overline{I_{r-2}}}{2r-3} \right) \right] \end{array} \right\}$$

Man kann diese Untersuchung solange fortsetzen wie es die numerische Anwendung fordert. Wir wenden uns einem angenehmeren Problem zu nämlich der Beugung von Kugelwellen an unserer Kugel.

Wir kommen wieder zu den Gleichungen (1), (2), (3) der Einführung.

Primäre und sekundäre Erregung unterscheiden sich nicht, wir setzen:

$$i_{nm} = i_{nmE} + i_{nmS}$$

$$\overline{i_{nm}} = \overline{i_{nmE}} + \overline{i_{nmS}}$$

$$h_{nm} = h_{nmE} + h_{nmS}$$

$$\overline{h_{nm}} = \overline{h_{nmE}} + \overline{h_{nmS}}$$

Die Grenzbedingungen an der Kugel sind:

$$E_\theta = E_\varphi = 0$$

E-Welle

Die Formeln (36) zeigen, daß man Folgendes fordern soll.

$$i_{n,m} \frac{d}{dr}\left[r\psi_n(kr)\right] + E_{n,m} \frac{d}{dr}\left[r\eta_n(kr)\right] = 0$$

$$\overline{i_{n,m}} \frac{d}{dr}\left[r\psi_n(kr)\right] + \overline{E_{n,m}} \frac{d}{dr}\left[r\eta_n(kr)\right] = 0$$

für $r = a$

(44)
$$E_{nm} = -i_{nm} \frac{\frac{d}{dr}\left[r\psi_n(kr)\right]}{\frac{d}{dr}\left[r\eta_n(kr)\right]_{r=a}} \qquad \overline{E_{nm}} = -\overline{i_{nm}} \frac{\frac{d}{dr}\left[r\psi_n(kr)\right]}{\frac{d}{dr}\left[r\eta_n(kr)\right]_{r=a}}$$

H-Welle

Die Formeln (37) zeigen, daß Folgendes gilt:

$$h_{nm}\, z\, \psi_n(kr) + H_{nm}\, z\, \chi_n(kr) = 0$$

$$\overline{h_{nm}}\, z\, \psi_n(kr) + \overline{H_{nm}}\, z\, \chi_n(kr) = 0$$

$$\text{für } r = a$$

(47)

$$H_{nm} = -\, h_{nm}\, \frac{a\,\psi_n(ka)}{a\,\chi_n(ka)} \qquad \overline{H_{nm}} = -\, \overline{h_{nm}}\, \frac{a\,\psi_n(ka)}{a\,\chi_n(ka)}$$

$\psi_n(ka)$ und $\psi_n'(ka)$ streben sehr schnell nach 0, sobald $n > ka$
$\chi_n(ka)$ und $\chi_n'(ka)$ werden sehr groß wenn $n > ka$
Infolgedessen werden H_{nm}, $\overline{H_{nm}}$, E_{nm}, $\overline{E_{nm}}$ sehr schnell abnehmen, wenn $n > ka$ so daß wir endliche lineare Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten zu lösen haben im Gegensatz zu dem, was wir in der Einführung erwartet haben; wir können ohne Gefahr das unendliche Gleichungssystem abbrechen.

4 Lösung des doppelten Übergangsproblems

Wir beabsichtigen den differentiellen Streuquerschnitt der Anordnung auszurechnen für eine Beobachtungsrichtung im Medium (I) das heißt die Luft.
In der Einführung und im Teil II wurde gezeigt, wie man die Ausstrahlung der Kugel durch die Koeffizienten E_{nm}, $\overline{E_{nm}}$, H_{nm} und $\overline{H_{nm}}$ kennzeichnen konnte und wie man diese Koeffizienten für eine bestimmte primäre Erregung berechnen kann.
Es handelt sich nun darum zu berechnen was ins Medium (I) zurückkommt, wenn man die Koeffizienten E_{nm}, $\overline{E_{nm}}$, H_{nm}, $\overline{H_{nm}}$ kennt.

Methode Man entwickelt nach ebenen Wellen die verschiedenen Mieschen partiellen Wellen. Diese ebenen Wellen werden gegebenenfalls aufgespalten in E- ebenen Wellen und H- ebenen Wellen bezüglich der z-Achse.
Die Fresnelschen Formeln werden verwendet für das E-Partial-Feld und das H-Partialfeld einzeln.
Dadurch gewinnt man die Hertzschen elektrischen und magnetischen Vektoren des gebrochenen Zustandes unter Integralform.
Es bleibt nur noch als Aufgabe an Hand dieser Hertzschen Vektoren, gegeben in Integralform, den Energiefluß in einer bestimmten Richtung zu finden.
Wir holen uns die folgende Integraldarstellung der Kugelbesselfunktion die eine Erweiterung der Weylschen Integraldarstellung ist

$$\psi_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_C^{2\pi}\int_W e^{ikR\cos\gamma}\, P_n^m(\cos\alpha) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\beta \,\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta \qquad (68)$$

und greifen auf die Gleichungen (52 a), (52 b), (52 c) zurück.

Als Beispiel behandeln wir ausführlich die folgende Miesche Partielle Welle:

$$\overrightarrow{\Pi_s^E} = E_{21}\, \tfrac{1}{2}\, P_2^1(\cos\gamma)\, \overrightarrow{cM}$$

die zweite Gleichung (52 b) gibt dann die Äquivalenz

$$\overrightarrow{\Pi_s^E} \sim \frac{3E_{21}}{K}\left[\eta_1 P_1'(\cos\gamma)\,\vec{n} - \eta_1 P_1\,\vec{n}\right]$$

aber (66) gibt:

$$\eta_1 P_1'(\cos\gamma)\,\vec{n} = \frac{i^{-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-iKR\cos\gamma} P_1'(\cos\alpha)\cos\beta\,\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta\,\vec{n}$$

$$\eta_1 P_1\,\vec{n} = \frac{i^{-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-iKR\cos\gamma} P_1(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta\,\vec{n}$$

das zweite soll aufgespalten in E und H-Feld (42) gibt:

$$\overrightarrow{\Pi^E} = \eta_1 P_1\,\vec{n}$$

$$\sim \begin{cases} \overrightarrow{\Pi^E} = \dfrac{i^{-1}}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} -\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha}\, e^{-iKR\cos\gamma} P_1(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta\,\vec{n} \\ \overrightarrow{\Pi^H} = \dfrac{i^{-1}}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} -\frac{\omega\varepsilon}{K}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\, e^{-iKR\cos\gamma} P_1(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta\,\vec{n} \end{cases}$$

und jetzt die Fresnelschen Formeln: Es ist

$$e^{-iKR\cos\gamma} = e^{-iKR\left[\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)\right]}$$

die Formeln (5o) und (51) geben:

$$\overrightarrow{\Pi^E} = e^{-iKR\left[\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)\right]}\,\vec{n}$$

wird gebrochen in:

$$\overrightarrow{\Pi}_g^E = \frac{2n^2\cos\alpha}{\cos\alpha + n\sqrt{n^2/(\cos^2\alpha - 1) + 1}} e^{ikR[\cos\beta\cos\alpha_0 + \sin\beta\sin\alpha_0\cos(\gamma-\beta)]} \times e^{id(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)} \vec{w}$$

$$\text{mit } n = \frac{K}{K_0} \qquad K_0 \sin\alpha_0 = K\sin\alpha$$

andererseits

$$\overrightarrow{\Pi}^H = e^{ikR[\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos(\gamma-\beta)]} \vec{w}$$

wird gebrochen in.

$$\overrightarrow{\Pi}_g^H = \frac{2n\cos\alpha}{n\cos\alpha + \sqrt{n^2/(\cos^2\alpha - 1) + 1}} e^{ikR[\cos\beta\cos\alpha_0 + \sin\beta\sin\alpha_0\cos(\gamma-\beta)] + id(K\beta - K_0\beta_0)} \vec{w}$$

Wir bringen diese gebrochenen ebenen Wellen unter das Integralzeichen:

$\overrightarrow{\Pi}^E = \eta_1 P_1' \cos\gamma \vec{w}$ wird gebrochen in.

$$\overrightarrow{\Pi}_g^E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{2n^2\cos\alpha\, e^{id(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)}}{\cos\alpha + n\sqrt{n^2/(\cos^2\alpha - 1) + 1}} e^{ikR\cos\beta} P_1'(\cos\alpha)\cos\beta\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta \vec{w}$$

$\overrightarrow{\Pi}^E = \eta_1 P_1 \vec{w}$ wird gebrochen in:

$$\overrightarrow{\Pi}_g^E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{2n^2\cos\alpha\, e^{id(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)}}{\cos\alpha + n\sqrt{n^2/(\cos^2\alpha - 1) + 1}} \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha} e^{ikR\cos\beta} P_1'(\cos\alpha)\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta \vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi}_g^H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{2n\cos\alpha\, e^{id(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)}}{n\cos\alpha + \sqrt{n^2/(\cos^2\alpha - 1) + 1}} \frac{n\zeta}{K} \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} e^{ikR\cos\beta} P_1'(\cos\alpha)\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta \vec{w}$$

und schließlich:

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = E_{21}\, \eta_2\, P_2'(\cos\varphi)\, \vec{u}$$

wird gebrochen in:

$$\overrightarrow{\Pi_g^E} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}} f(\alpha,\beta)\, e^{-iKr[\cos\beta\cos\alpha_0 + \sin\beta\sin\alpha_0\cos(\varphi-\beta)]} \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta\, \vec{u}$$

$$\overrightarrow{\Pi_g^H} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}} g(\alpha,\beta)\, e^{-iKr[\cos\beta\cos\alpha_0 + \sin\beta\sin\alpha_0\cos(\varphi-\beta)]} \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta\, \vec{v}$$

mit $K_0 \sin\alpha_0 = K\sin\alpha$

und:

$$A(\alpha,\beta) = \frac{3E_{21}\, i^{-1} 2n^2 \cos\alpha\, e^{+id(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)}}{K\,(\cos\alpha + n\sqrt{n^2(\cos^2\alpha - 1) + 1})} \left[P_1'(\cos\alpha)\cos\beta + \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha} P_1(\cos\alpha) \right]$$

$$g(\alpha,\beta) = \frac{3E_{21}\, i^{-1} 2n\cos\alpha\, e^{+id(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)}}{K\,(n\cos\alpha + \sqrt{n^2(\cos^2\alpha - 1) + 1})} \cdot \frac{\omega\varepsilon}{K} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} P_1(\cos\alpha)$$

mit den anderen Mieschen partiellen Wellen verfahren wir ganz analog, die Maxwellschen Gleichungen sind linear. Wir dürfen die einzelnen Hertzschen Vektoren addieren um die Hertzschen Vektoren des totalen gebrochenen Zustandes zu erhalten und wir kommen zu dem folgenden Schlußergebnis:

(69)

$$\overrightarrow{\Pi}_g^E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W F(\alpha_0,\beta_0)\, e^{-ikR[\cos\theta\cos\alpha_0+\sin\theta\sin\alpha_0\cos(\varphi-\beta)]} \sin\alpha_0\, d\alpha_0\, d\beta\, \vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi}_g^H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W b(\alpha_0,\beta_0)\, e^{-ikR[\cos\theta\cos\alpha_0+\sin\theta\sin\alpha_0\cos(\varphi-\beta)]} \sin\alpha_0\, d\alpha_0\, d\beta\, \vec{w}$$

Und jetzt die Frage: Was ist der Energiefluß in eine bestimmte Richtung?
Vorerst aus einfachen Überlegungen dürfen wir die Energieanteile des magnetischen und des elektrischen Zustandes einfach addieren. Dann rechnen wir den Energiefluß, der dem elektrischen Anteil entspricht:

(70)

$$\overrightarrow{\Pi}_g^E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W F(\alpha_0,\beta_0)\, e^{-ikr_0[\cos\theta\cos\alpha_0+\sin\theta\sin\alpha_0\cos(\varphi-\beta)]} \sin\alpha_0\, d\alpha_0\, d\beta\, \vec{w}$$

In großer Entfernung vom Koordinatenursprung hat der vom $\overrightarrow{\Pi}_g^E$ dargestellte elektromagnetische Zustand die Struktur einer ebenen Welle. In einem bestimmten Punkt α_0, β_0, r_0, $w = r_0 \gg \lambda$ läßt sich $\overrightarrow{\Pi}_g^E$ durch

(71)

$$\overrightarrow{\Pi}^E = \frac{1}{ikr_0} F(\alpha_0,\beta_0)\, e^{-ikr_0[\cos\theta\cos\alpha_0+\sin\theta\sin\alpha_0\cos(\varphi-\beta)]}\, \vec{w}$$

darstellen.
Das wollen wir jetzt kurz zeigen. Die "Äquivalenz" zwischen (68) und (69) im Falle des Hertzschen Dipols ist:

$$\overrightarrow{\Pi}^E = \frac{e^{-ikr}}{ikr}\vec{w} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W e^{-ikr[\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)]} \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta\, \vec{w}$$

In großer Entfernung:

$$H_\varphi \sim i\omega\varepsilon \sin\vartheta \frac{e^{ikr}}{r}$$

aber die Formel (39) § 6 gibt:

$$\overrightarrow{\Pi^E} = e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}}\,\vec{n} \longrightarrow H_\varphi = -\omega\varepsilon K \sin\vartheta\, e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}}$$

das heißt in großer Entfernung $r_0 \gg \lambda$ und in der Richtung $(\alpha_0,$

$$\overrightarrow{\Pi^E} = \frac{e^{iKr}}{iKr}\,\vec{n}$$

äquivalent mit

$$\overrightarrow{\Pi^E} = \frac{1}{iKr_0}\, e^{i\,\overrightarrow{K(\alpha_0\beta_0)}\cdot\vec{R}}\,\vec{n}$$

aber der Faktor $e^{i\,\overrightarrow{K(\alpha_0\beta_0)}\cdot\vec{R}}$

steht eben unter dem Integralzeichen der Integraldarstellung der Funktion $\frac{e^{iKr}}{iKr}$.

Die Untersuchungen des § 1 zeigen, daß es zu jeder charakteristischen Funktion

$$\eta_n(Kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi$$

einen Operator gibt OPmn derart, daß

$$\eta_n(Kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi = OP_{mn}\left[\eta_0(Kr)\, P_0(\cos\vartheta)\right]$$

OPmn besteht aus einer linearen Kombination von gemischten Ableitungen nach x,y und z. Die Gleichung (66) zeigt, daß dieser Operator angewandt auf

$$\eta_0(Kr)\, P_0(\cos\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{L_0}\int_{W}^{\pi} e^{iKr[\cos\vartheta\cos\alpha + \sin\vartheta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)]}\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

gibt:

$$\gamma_{n1}(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} e^{-ikr\cos\gamma} P_n^m(\cos\alpha)\cos m\beta \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta$$

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\alpha + \sin\vartheta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)$$

$$\longrightarrow (-1)^m P_n^m(\cos\beta)\cos m\beta \; e^{-ikr\cos\vartheta}$$

daraus folgert man, daß in großer Entfernung $r_0 \gg \lambda$ und in der Richtung ($\alpha_0\ \beta_0$)

$$\overrightarrow{\Pi^E} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} e^{-ikr\cos\gamma} P_n^m(\cos\alpha)\cos m\beta \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta \, \vec{w}$$

äquivalent mit der ebenen Welle:

$$\overrightarrow{\Pi^E} = \frac{(-i)^n}{ikr_0} P_n^m(\cos\alpha_0)\cos m\beta_0 \, e^{-ik\overrightarrow{(\alpha_0\beta_0)}\cdot\vec{r}} \vec{w} \text{ wird}$$

Die Erweiterung dieses Ergebnisses auf den allgemeinen Fall (68) und (69) ist unmittelbar: man braucht nur die entsprechende Quelle nach Kugelwellen zu entwickeln.
Dann:

$$\overline{S} = \frac{E \times H^*}{2} \quad (= \text{Poyntingscher Vektor})$$

(72) $$|S_E| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{\omega^2\varepsilon_0^2\sin^2\vartheta_0}{r_0^2}\,F^2(\alpha_0\beta_0)$$

für den magnetischen Anteil.

(73) $$|S_H| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\omega^2\mu_0^2\sin^2\vartheta_0}{r_0^2}\,G^2(\alpha_0\beta_0)$$

An Hand der Ausdrücke (70) und (71) wollen wir jetzt den Streuquerschnitt der Anordnung in einer bestimmten Richtung ausrechnen.

Dies ist folgendermaßen zu verstehen:
Wir wählen zunächst eine beliebige feste Richtung der einfallenden Welle in Luft; dann berechnen wir für alle Ausstrahlungsrichtungen in der Luft den zugehörigen Streuquerschnitt. (In unserer numerischen Auswertung werden wir die Einfallsrichtung zu 45° wählen.) Die Energieanteile der beiden Polarisationen der einfallenden Welle addieren sich einfach. Wenn die einfallende ebene Welle eine Welle mit E senkrecht zur Einfallsebene ist, dargestellt durch

$$\overrightarrow{\Pi_e^E} = e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos\varphi]}\vec{u}$$

findet man mit Hilfe der Formel (39) S.

$$|P| = \frac{1}{2}\left|(E\times H^*)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_e}{\varepsilon_e}}\cos^2\varepsilon^2|\vec{K_0}|^2\sin^2\theta_1 \qquad \frac{1}{|P|} = \frac{dE}{dF}$$

wobei dE die Energie ist die durch die Fläche dF hindurchströmt. Wenn in der einfallenden ebenen Welle dargestellt durch

$$\overrightarrow{\Pi_e^H} = e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos\varphi]}\vec{v}$$

H senkrecht zur Einfallsebene liegt, findet man leicht mit Hilfe der Formel (4o) S.

$$|P| = \frac{1}{2}\left|(E\times H^*)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_e}{\mu_e}}\cos^2\mu_i^2|\vec{K_0}|^2\sin^2\theta_1 \qquad \frac{1}{|P|} = \frac{dE}{dF}$$

wobei dE die durchschnittlich in der Zeit durch die Fläche dF abtransportierte Energie ist. Andererseits ist die in den Kegel der Öffnung $d\Omega$ gebeugte Energie gleich

$$dE = \left[|S^E| + |S^H|\right] r_e^2 d\Omega$$

Der differentielle Streuquerschnitt ist dann so definiert

$$\sigma = \frac{dE}{d\Omega} = \frac{dE}{dF}\times\frac{dF}{d\Omega}$$

Im Falle, wo die einfallende ebene Welle

$$\overrightarrow{\Pi e^{E}} = e^{i K_0 r [\cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos\varphi]} \vec{w} \text{ ist}$$

$$\sigma = \frac{1}{|\vec{K_0}|^2} \frac{\sin^2\alpha_0}{\sin^2\theta_1} \left[F^2(\alpha_0, \beta_0) + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} b^2(\alpha_0, \beta_0) \right]$$

Im Falle wo die einfallende ebene Welle

$$\overrightarrow{\Pi e^{H}} = e^{i K_0 r [\cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos\varphi]} \vec{w} \text{ ist}$$

$$\sigma = \frac{1}{|\vec{K_0}|^2} \frac{\sin^2\alpha_0}{\sin^2\theta_1} \left[b^2(\alpha_0, \beta_0) + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} F^2(\alpha_0, \beta_0) \right]$$

σ ist der differentielle Streuquerschnitt

in der Richtung α_0, β_0

$F(\alpha_0, \beta_0)$ und $b(\alpha_0, \beta_0)$ gibt (69) an.

5 Numerische Beispiele

Wir behandeln jetzt als Anwendung des Vorherigen zwei numerische Beispiele.
Für die trockene Erde nehmen wir:

$$n = \frac{K_e}{K} = 2$$

Radius der Kugela = 25 cm = o,25 m, Entfernung des Zentrums der Kugel von der 'Erdoberfläche d = 5o cm = o,5 m.
Wellenlänge im Innern der Erde = d = o,5 m.
Die primäre Erregung besteht aus einer ebenen Welle kommend aus dem Medium (I), die unter einem Einfallswinkel vom $\pi/4$ auf die Erde einfällt.
Man wird zwei Fälle unterscheiden
1) Elektrischer Vektor parallel zur Erdoberfläche.
2) Magnetischer Vektor parallel zur Erdoberfläche.

Gesucht ist der Streuquerschnitt abhängig von der Beobachtungsrichtung in der Meridianebene.

Von den äußerst langwierigen Rechnungen soll der Weg nur skizziert und das Resultat angegeben werden.
Vorerst untersuchen wir die Brüche

$$\frac{\frac{d}{dz}\left[z\,\psi_n(Kz)\right]}{\frac{d}{dz}\left[z\,\psi_n(Kz)\right]} \quad \text{für } z=a \quad \text{wird} \quad \frac{\psi_n'(Ka)}{\psi_n(Ka)}$$

hier Ka = π Wir haben gefunden:

n	1	2	3	4
$-\frac{E_{n,m}}{e_{n,m}} = -\frac{\overline{E_{n,m}}}{\overline{e_{n,m}}}$	$-\frac{1}{a_1} = 0{,}36 + 0{,}14\,i$	$-\frac{1}{a_2} = 0{,}41 - 0{,}44\,i$	$-\frac{1}{a_3} = 0{,}24 - 0{,}42\,i$	$-\frac{1}{a_4} = 0{,}006\,i$
$-\frac{H_{n,m}}{h_{n,m}} = -\frac{\overline{H_{n,m}}}{\overline{h_{n,m}}}$	$-\frac{1}{b_1} = 0{,}4 - 0{,}5\,i$	$-\frac{1}{b_2} = 0{,}65 + 0{,}48\,i$	$-\frac{1}{b_3} = 0{,}11 + 0{,}44\,i$	$-\frac{1}{b_4} = -0{,}03\,i$

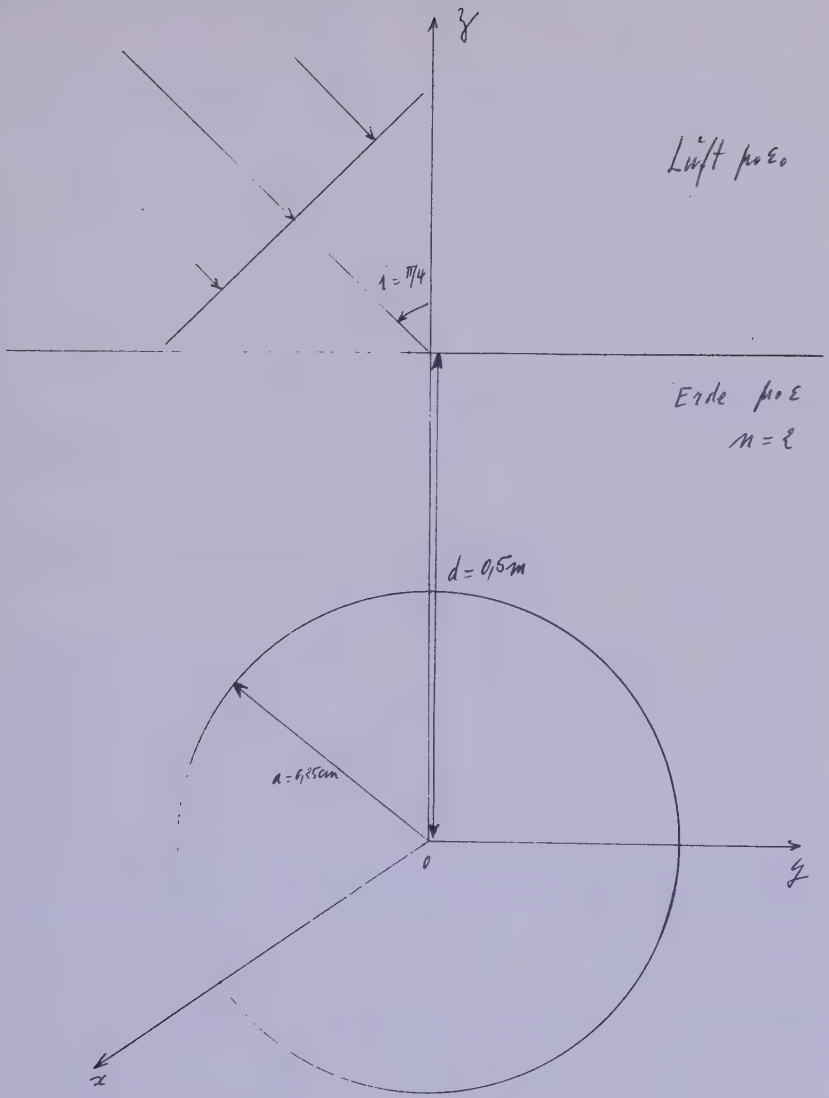


Abb 6a

Die folgenden Größen $\frac{1}{a_x}$ und $\frac{1}{t_x}$ sind vernachlässigbar um die Rechnungen durchführbar zu machen, vernachlässigen wir sie für $n \geq 4$.
Bei der Berechnung zeigte sich nämlich, daß im von der Kugel reflektierten Feld die Anteile für $n > 3$ unter 10 % bleiben.

Die Gleichungen (53) bis (65) zeigen dann daß zweckmäßig die in (53) bis (56) definierten Koeffizienten

$$a_\nu, \overline{a_\nu}, b_\nu, \overline{b_\nu}, c_\nu, \overline{c_\nu} \quad \text{für } \nu = 0 \text{ bis } l$$

ausgerechnet werden. Dann sollen die Formeln (53) bis (65) verwendet werden, dann sollen die Formeln (53) bis (65) verwendet werden um die Koeffizienten $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \bar{\alpha}_\lambda, \bar{\beta}_\lambda$ so wie sie in der Einführung durch die Gleichungen (9) und (10) definiert wurden, von $\lambda = 1$ bis $\lambda = 3$ auszurechnen.
Dann soll man die Debyschen Potentiale der primären Erregung mit Hilfe der Formeln (48) und (49) ermitteln.
Sodann errechnet man die Koeffizienten:

$$E_{n,m}\,;\ \overline{E_{n,m}}\,;\ H_{n,m}\,;\ \overline{H_{n,m}} \quad \text{für}$$

$$n = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad m \leq n$$

durch eine endliche Anzahl von Sys+?men von linearen Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten. (Zwei Systeme für ein bestimmtes m.) Es werden die Koeffizienten $\overline{E}$ und $\overline{H}$ wie E und H gefunden.
Dann werden die Formeln)72) und (73) verwendet, um den Streuquerschnitt auszurechnen.
Zuerst die Integrale:

$$a_\nu = (-1)^\nu (2\nu+1) \int_W f_1(\cos\theta_i)\, e^{iK\cos\theta_i z_d}\, P_\nu(\cos\theta_i) \sin\theta_i \, d\theta_i$$

$$\overline{a_\nu} = (-i)^\nu (2\nu+1) \int_W \overline{f_1(\cos\theta_i)}\, e^{iK\cos\theta_i z_d}\, P_\nu(\cos\theta_i) \sin\theta_i \, d\theta_i$$

$$A_r = (-i)^r (2r+1) \frac{r-1!}{r+1!} \int_W f_r(\cos\theta_0) e^{+iK\cos\theta_0 z d} P_r'(\cos\theta_0) \cos\theta_0 \, d\theta_0$$

$$\overline{A_r} = (-i)^r (2r+1) \frac{r-1!}{r+1!} \int_W \overline{f_r(\cos\theta_0)} \, e^{-iK\cos\theta_0 z d} P_r'(\cos\theta_0) \cos\theta_0 \, d\theta_0$$

$$C_r = -\frac{\omega\varepsilon}{K} (-i)^r (2r+1) \frac{r-1!}{r+1!} \int_W \overline{f_r(\cos\theta_0)} \, e^{-iK\cos\theta_0 z d} P_r'(\cos\theta_0) \, d\theta_0$$

$$\overline{C_r} = \frac{\omega\mu_0}{K} (-i)^r (2r+1) \frac{r-1!}{r+1!} \int_W f_r(\cos\theta_0) e^{+iK\cos\theta_0 z d} P_r'(\cos\theta_0) \, d\theta_0$$

Wir führen die Variablentransformation ein

$$\cos\theta_0 = 1 + iy$$

Wenn θ_0 sich auf dem Weg W $0 \longrightarrow \pi/2 \longrightarrow \pi/2 - i\infty$ bewegt dann durchläuft $\cos\theta_0$ $1 \longrightarrow 0 \longrightarrow -i\infty$. Wir stützen uns auf den Causchy-Satz und lassen $\cos\theta_0$ auf der Geraden $1 \longrightarrow 1 + i\infty$ laufen. Y variiert von 0 bis ∞

$$P_r(\cos\theta_0) \sin\theta_0 \, d\theta_0 \; ; \; P_r'(\cos\theta_0) \cos\theta_0 \, d\theta_0 \; ; \; P_r'(\cos\theta_0) \, d\theta_0$$

sind Polynome in y vervielfacht mit dem Differential dy. Wir sehen, wir sind letzten Endes auf die Ausrechnung der folgenden Integrale

$$I_n = \int_0^\infty f_r(1+iy) e^{-Kzdy} y^n dy \qquad \overline{I_n} = \int_0^\infty \overline{f_r(1+iy)} \, e^{-Kzdy} y^n dy$$

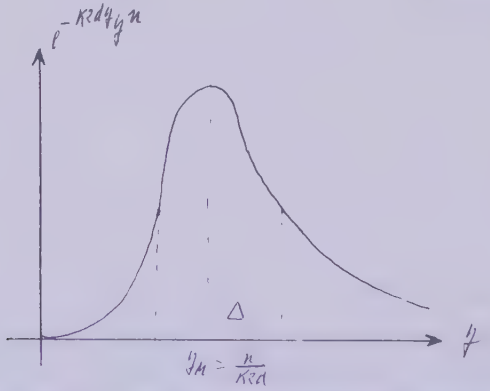
zurückgeführt mit

$$f_r = \frac{1+iy - n\sqrt{1-n^2+n^2(1+iy)^2}}{1+iy+n\sqrt{1-n^2+n^2(1+iy)^2}}$$

$$\overline{f_z} = \frac{n(1+ig) - \sqrt{1-n^2+n^2(1+ig)^2}}{n(1+ig) + \sqrt{1-n^2+n^2(1+ig)^2}}$$

und wir brauchen die Rechnungen für n = 0 bis 6 auszuführen. Natürlich sind die Integrale I_n und $\overline{I_n}$ nicht exakt lösbar. Man muß sie approximieren. Dafür soll man die Kurven $Re(f_z)$ $Im(f_z)$ $Re(\overline{f_z})$ $Im(\overline{f_z})$ Punkt für Punkt konstruieren. Theoretisch für y variierend von 0 bis ∞ praktisch genügt es von 0 bis 2. Man stellt dann fest, daß diese Funktionen schwach veränderlich sind.

Wir betrachten den Faktor $e^{-Kzdg}g^n$. Die Untersuchung



dieser Funktion zeigt, daß sie ein scharfes Maximum für $g_n = \frac{n}{Kzd}$ und sehr stark absteigt beiderseits dieses Maximums. Der Hauptanteil unserer Integrale liegt um dieses Maximum. Aber die Betrachtung der Kurven von

$$Re(f_z)\ Im(-f_z)\ Re(\overline{f_z})\ Im(\overline{f_z})$$

zeigt, daß diese Funktionen kaum variieren in einem Intervall kleiner als Δ wo Δ die Halbwertsbreite der Funktion darstellt. Wir ersetzen dann um den Punkt $g_n = \frac{n}{Kzd}$ $f_z(g)$ durch die Reihenentwicklung

$$f_z(g_n) + (g-g_n) f_z'(g_n)$$

Aber

$$\int_0^\infty e^{-K2d\,y}\, y^n\, dy = \frac{n!}{(K2d)^{n+1}}$$

infolgedessen:

$$I_n \# f_1(y_m)\,\frac{n!}{(K2d)^{n+1}} + f_1'(y_m)\,\frac{n!}{(K2d)^{n+2}}$$

$$\overline{I_n} \# \overline{f_1(y_m)}\,\frac{n!}{(K2d)^{n+1}} + \overline{f_1'(y_m)}\,\frac{n!}{(K2d)^{n+2}}$$

Wir bleiben dabei in n $<$ 7. Dann zu den Koeffizienten zurückgehend schreiben wir

$$a_r = (-i)^{r+1}(2r+1)\,P_r(I_0 + i\,I_1)$$

$$\overline{a_r} = (-i)^{r+1}(2r+1)\,P_r(\overline{I_0} + i\,\overline{I_1})$$

$$b_r = -(-i)^{r+1}(2r+1)\,\frac{r-1!}{r+1!}\,P_r^{(1)}(I_0 + i\,I_1)\,I_1$$

$$\overline{b_r} = -(-i)^{r+1}(2r+1)\,\frac{r-1!}{r+1!}\,P_r^{(1)}(\overline{I_0} + i\,\overline{I_1})\,\overline{I_1}$$

$$c_r = \frac{w\varepsilon}{K}(-i)^{r+1}(2r+1)\,\frac{r-1!}{r+1!}\,P_r^{(1)}(\overline{I_0} + i\,\overline{I_1})$$

$$\overline{c_r} = -\frac{w\mu_c}{K}(-i)^{r+1}(2r+1)\,\frac{r-1!}{r+1!}\,P_r^{(1)}(I_0 + i\,I_1)$$

Wenn $P(1+1x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

dann heißt $P(I_0 + i\,I_1) = I_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots$

n	c	1	2	3	4	5	6
a_r	$-8,4.10^{-3}$ $2,6.10^{-2}\cdot\lambda$	$7,5.10^{-2}$ $3,36.10^{-2}\cdot\lambda$	81.10^{-3} $-112.10^{-3}\cdot\lambda$	-117.10^{-3} $167.10^{-3}\cdot\lambda$	-264.10^{-3} $57.10^{-3}\cdot\lambda$	117.10^{-3} $349.10^{-3}\cdot\lambda$	302.10^{-3} $385.10^{-3}\cdot\lambda$
$\overline{a_r}$	$-8,4.10^{-3}$ $-26.10^{-3}\cdot\lambda$	$-8,13.10^{-2}$ $20,4.10^{-3}\cdot\lambda$	$16,5.10^{-3}$ $145.10^{-3}\cdot\lambda$	217.10^{-3} $12,2.10^{-3}\cdot\lambda$	165.10^{-3} $-282.10^{-3}\cdot\lambda$	-318.10^{-3} $-264.10^{-3}\cdot\lambda$	-476.10^{-3} $231.10^{-3}\cdot\lambda$
f_r	0	-4.10^{-3} $-1,44.10^{-3}\cdot\lambda$	$1,2.10^{-3}$ $6,5.10^{-3}\cdot\lambda$	$7,4.10^{-3}$ $6,72.10^{-3}\cdot\lambda$	$6,42.10^{-3}$ $-7,98.10^{-3}\cdot\lambda$	$0,421.10^{-3}$ $-8,44.10^{-3}\cdot\lambda$	$-9,23.10^{-3}$ $-47,8.10^{-3}\cdot\lambda$
$\overline{f_r}$	0	24.10^{-3} $-1,65.10^{-3}\cdot\lambda$	$-2,27.10^{-3}$ $-449.10^{-3}\cdot\lambda$	$-7,2.10^{-3}$ $-45.10^{-3}\cdot\lambda$	$4,95.10^{-5}$ $10,3.10^{-3}\cdot\lambda$	$13,1.10^{-3}$ $414.10^{-3}\cdot\lambda$	$11,5.10^{-3}$ $-14.10^{-3}\cdot\lambda$
$\frac{K}{\omega\varepsilon}\,C_r$	0	-39.10^{-3} $12,6.10^{-3}\cdot\lambda$	17.10^{-3} $67,8.10^{-3}\cdot\lambda$	$99,7.10^{-3}$ $-1,34.10^{-3}\cdot\lambda$	$-1,03.10^{-3}$ $-139.10^{-3}\cdot\lambda$	-168.10^{-3} $-285.10^{-3}\cdot\lambda$	$78,2.10^{-3}$ $194.10^{-3}\cdot\lambda$
$-\frac{K}{\omega\mu_0}\,\overline{C_r}$	0	39.10^{-3} $12,6.10^{-3}\cdot\lambda$	$-27,7.10^{-3}$ $-66,6.10^{-3}\cdot\lambda$	$-80,5.10^{-3}$ $-52.10^{-3}\cdot\lambda$	$-87,1.10^{-3}$ $86,4.10^{-3}\cdot\lambda$	$71,4.10^{-3}$ $222.10^{-3}\cdot\lambda$	167.10^{-3} $310.10^{-3}\cdot\lambda$

Die Anwendung der Formeln (53) bis (65) gibt die folgenden Ergebnisse.

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = K\,\eta_1 E_1 \overrightarrow{e_M}$$ reflektiert nach m.

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \Big[\big(6,1.10^{-3} + 32,7.10^{-3}\cdot\lambda\big)K\Psi_1 L_1 + \big(8.10^{-3} - 11,6.10^{-3}\cdot\lambda\big)K\Psi_2 L_2 + \big(13,1.10^{-3} - 16,1.10^{-3}\cdot\lambda\big)K\Psi_3 L_3 +$$

$\overrightarrow{\Pi_S^E} = K\eta_1 P_1' \frac{\sin}{\cos}\varphi \; \overrightarrow{OM}$ reflektiert sich zu:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = K.10^{-3}\left[(-6{,}7-21{,}4i)\Psi_1 P_1' \frac{\sin}{\cos}\varphi + (-12+2{,}9i)\Psi_2 P_2' \frac{\sin}{\cos}\varphi + \right.$$
$$\left. + (-0{,}95+7{,}58i)\Psi_3 P_3' \frac{\sin}{\cos}\varphi + \dots\right]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \omega\varepsilon.10^{-3}\left[(-4{,}38-20{,}3i)\Psi_1 P_1' \frac{\cos}{-\sin}\varphi + (-13{,}5-1{,}6i)\Psi_2 P_2' \frac{\cos}{-\sin}\varphi + \right.$$
$$\left. + (-2{,}18+10{,}8i)\Psi_3 P_3' \frac{\cos}{-\sin}\varphi + \dots\right]\overrightarrow{OM}$$

$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K\eta_1 P_1 \overrightarrow{OM}$ reflektiert sich zu:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = K.10^{-3}\left[(-5+3i)\Psi_1 P_1 + (3{,}9+9{,}4i)\Psi_2 P_2 + (14{,}7-3i)\Psi_3 P_3 + \dots\right]\overrightarrow{OM}$$

$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K\eta_1 P_1' \frac{\sin}{\cos}\varphi \; \overrightarrow{OM}$ reflektiert sich zu:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \omega\mu_0.10^{-3}\left[(-9{,}14-20i)\Psi_1 P_1' \frac{\cos}{-\sin}\varphi + (-9{,}55-7{,}5i)\Psi_2 P_2' \frac{\cos}{-\sin}\varphi + \right.$$
$$\left. + (-15{,}8+4{,}26i)\Psi_3 P_3' \frac{\cos}{-\sin}\varphi + \dots\right]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = K.10^{-3}\left[21i\Psi_1 P_1' \frac{\sin}{\cos}\varphi + (11{,}7-4{,}05i)\Psi_2 P_2' \frac{\sin}{\cos}\varphi + (4{,}62-7{,}54i)\Psi_3 P_3' \frac{\sin}{\cos}\varphi + \dots\right]\overrightarrow{OM}$$

$\overrightarrow{\Pi_S^E} = K\eta_2 P_2 \overrightarrow{OM}$ reflektiert sich zu:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = K.10^{-3}\left[(14{,}9-22i)\Psi_1 P_1 + (-36{,}2-36{,}1i)\Psi_2 P_2 + (-35{,}2-32{,}5i)\Psi_3 P_3 + \dots\right]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K\eta_2 P_2 \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = K.10^{-3}\left[(7+17i)\Psi_1 P_1 + (30{,}3-60i)\Psi_2 P_2 + (9{,}4+65{,}8i)\Psi_3 P_3 + \dots\right]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_s^E} = K\,\eta_2\, P_2^1 \substack{\sin\\\cos}\varphi\ \overrightarrow{OM}$$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = K\cdot 10^{-3}\Big[(57{,}5+4{,}2i)\,\eta_1 P_1^1 \substack{\sin\\\cos}\varphi + (-4+36{,}7i)\,\eta_2 P_2^1 \substack{\sin\\\cos}\varphi + (22{,}6-18{,}1i)\,\eta_3 P_3^1 \substack{\sin\\\cos}\varphi + \dots\Big]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \omega\varepsilon \substack{-\cos\\\sin}\varphi\Big[(65{,}2+6{,}1i)\,\eta_1 P_1^1 \substack{-\cos\\\sin}\varphi + (5{,}63-85i)\,\eta_2 P_2^1 \substack{-\cos\\\sin}\varphi + (-25{,}5-10{,}3i)\,\eta_3 P_3^1 \substack{-\cos\\\sin}\varphi + \dots\Big]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_s^H} = K\,\eta_2\, P_2^1 \substack{\sin\\\cos}\varphi\ \overrightarrow{OM}$$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = K\cdot 10^{-3}\Big[(13{,}5+6{,}23i)\,\eta_1 P_1^1 \substack{\sin\\\cos}\varphi + (28{,}2-29{,}4i)\,\eta_2 P_2^1 \substack{\sin\\\cos}\varphi + (-2{,}21+7{,}5i)\,\eta_3 P_3^1 \substack{\sin\\\cos}\varphi + \dots\Big]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \omega\mu_0\cdot 10^{-3}\Big[(66{,}7+35{,}5i)\,\eta_1 P_1^1 \substack{-\cos\\\sin}\varphi + (12{,}84-4{,}25i)\,\eta_2 P_2^1 \substack{-\cos\\\sin}\varphi + (-24{,}3-5{,}18i)\,\eta_3 P_3^1 \substack{-\cos\\\sin}\varphi + \dots\Big]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_s^E} = K\,\eta_2\, P_2^2 \substack{\sin\\\cos}2\varphi\ \overrightarrow{OM}$$ reflektiert sich in

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = K\cdot 10^{-3}\Big[(-9{,}4+2i)\,\eta_2 P_2^2 \substack{\sin\\\cos}2\varphi + (-1+4{,}1i)\,\eta_3 P_3^2 \substack{\sin\\\cos}2\varphi + \dots\Big]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \omega\varepsilon\cdot 10^{-3}\Big[(-3{,}97-2{,}26i)\,\eta_2 P_2^2 \substack{-\cos\\\sin}2\varphi + (-1{,}2-2{,}15i)\,\eta_3 P_3^2 \substack{-\cos\\\sin}2\varphi + \dots\Big]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_s^H} = K\,\eta_2\, P_2^2 \substack{\sin\\\cos}2\varphi\ \overrightarrow{OM}$$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = K\cdot 10^{-3}\Big[(7{,}16+2{,}64i)\,\eta_2 P_2^2 \substack{\sin\\\cos}2\varphi + (2{,}82-15{,}1i)\,\eta_3 P_3^2 \substack{\sin\\\cos}2\varphi + \dots\Big]\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \omega\mu_0\Big[(23{,}3+3{,}7i)\,\eta_2 P_2^2 \substack{-\cos\\\sin}2\varphi + (2{,}37-11{,}9i)\,\eta_3 P_3^2 \substack{-\cos\\\sin}2\varphi + \dots\Big]\overrightarrow{OM}$$

$\overrightarrow{\Pi_S^E} = K \eta_3 P_3 \overrightarrow{OM}$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = K \cdot 10^{-3} \left[(-45{,}6 - 44{,}7i) \psi_1 P_1 + (18{,}1 + 38{,}4i) \psi_2 P_2 + (47{,}2 + 140i) \psi_3 P_3 + \cdots \right] \overrightarrow{OM}$$

$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K \eta_3 P_3 \overrightarrow{OM}$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = K \cdot 10^{-3} \left[(45{,}4 - 12i) \psi_1 P_1 + (9{,}17 + 30{,}2i) \psi_2 P_2 + (-11{,}7 + 12{,}8i) \psi_3 P_3 + \cdots \right] \overrightarrow{OM}$$

$\overrightarrow{\Pi_S^E} = K \eta_3 P_3' \sin\varphi \overrightarrow{OM}$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = K \cdot 10^{-3} \left[(-48 + 9{,}1i) \psi_1 P_1' \cos\varphi + (5{,}76 + 9i) \psi_2 P_2' \sin\varphi + \right.$$
$$\left. + (-4{,}87 - 4{,}13i) \psi_3 P_3' \sin\varphi + \cdots \right] \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \omega\varepsilon \cdot 10^{-3} \left[(93{,}6 - 78{,}6i) \psi_1 P_1' \frac{\cos\varphi}{m} + (-115 - 182i) \frac{\cos\varphi}{m} + \right.$$
$$\left. + (-188 - 43{,}5i) \psi_3 P_3' \frac{\cos\varphi}{m} + \cdots \right] \overrightarrow{OM}$$

$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K \eta_3 P_3' \sin\varphi \overrightarrow{OM}$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = K \cdot 10^{-3} \left[(111 - 126i) \psi_1 P_1' \frac{\sin\varphi}{\cos} + (-57 - 57{,}7i) \psi_2 P_2' \frac{\sin\varphi}{\cos} + \right.$$
$$\left. + (-76 - 57{,}7i) \psi_3 P_3' \frac{\sin\varphi}{\cos} + \cdots \right] \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \omega\mu_0 \left[(-53{,}2 - 187i) \psi_1 P_1' \frac{\cos\varphi}{m} + (-116 - 243i) \psi_2 P_2' \frac{\cos\varphi}{m} + \right.$$
$$\left. + (-141 + 64{,}6i) \psi_3 P_3' \frac{\cos\varphi}{m} + \cdots \right] \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = K\,\eta_3 P_3^2 \substack{\sin\\ \cos} 2\varphi\, \overrightarrow{e_M}$$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = K \cdot 10^{-3}\left[(29{,}9+82{,}5i)\,\eta_3 P_2^2 \substack{\sin\\ \cos} 2\varphi + (-24{,}1+2{,}3i)\,\eta_3 P_3^2 \substack{\sin\\ \cos} 2\varphi + \dots\right]\overrightarrow{e_M}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \omega\varepsilon\left[(8{,}25+28{,}4i)\,\eta_2 P_2^2 \substack{-\cos\\ \sin} 2\varphi + (196+4{,}69i)\,\eta_3 P_3^2 \substack{-\cos\\ \sin} 2\varphi + \dots\right]\overrightarrow{e_M}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K\,\eta_3 P_3^2 \substack{\sin\\ \cos} 2\varphi\, \overrightarrow{e_M}$$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = K \cdot 10^{-3}\left[(-493+23{,}1i)\,\eta_2 P_2^2 \substack{\sin\\ \cos} 2\varphi + (66{,}5+38{,}9i)\,\eta_3 P_3^2 \substack{\sin\\ \cos} 2\varphi + \dots\right]\overrightarrow{e_M}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \omega\mu_0\left[(-23+66{,}6i)\,\eta_2 P_2^2 \substack{-\cos\\ \sin} 2\varphi + (39{,}7+164i)\,\eta_3 P_3^2 \substack{-\cos\\ \sin} 2\varphi + \dots\right]\overrightarrow{e_M}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = K\,\eta_3 P_3^3 \substack{\sin\\ \cos} 3\varphi\, \overrightarrow{e_M}$$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = K \cdot 10^{-3}(2{,}71+28{,}3i)\,\eta_3 P_3^3 \substack{\sin\\ \cos} 3\varphi\, \overrightarrow{e_M} + \dots$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \omega\varepsilon \cdot 10^{-3}(-2{,}45-3{,}48i)\,\eta_3 P_3^3 \substack{-\cos\\ \sin} 3\varphi\, \overrightarrow{e_M} + \dots$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = K\,\eta_3 P_3^3 \substack{\sin\\ \cos} 3\varphi\, \overrightarrow{e_M}$$ reflektiert sich in:

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = K \cdot 10^{-3}(-56+45i)\,\eta_3 P_3^3 \substack{\sin\\ \cos} 3\varphi\, \overrightarrow{e_M}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^E} = \omega\mu_0 \cdot 10^{-3}(18-16i)\,\eta_3 P_3^3 \substack{-\cos\\ \sin} 3\varphi\, \overrightarrow{e_M}$$

Wir benutzen die Schreibweise der Einführung und schreiben die verschiedenen Gleichungssysteme die uns die Unbekannten

$E_{n,m}$; $\overline{E_{n,m}}$, $H_{n,m}$; $\overline{H_{n,m}}$ liefern.

$$\overrightarrow{\pi_S^E} = E_{33}\,\psi_3\,\rho_3^3\cos 3\varphi\,\overrightarrow{OM} \qquad \overrightarrow{\pi_{el}^E} = \rho_{33}\,\rho\,\psi_3\,\rho_3^3\cos 3\varphi\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\pi_S^H} = \overline{H_{33}}\,\psi_3\,\rho_3^3\sin 3\varphi\,\overrightarrow{OM} \qquad \overrightarrow{\pi_{el}^H} = \overline{h_{33}}\,\rho\,\psi_3\,\rho_3^3\sin 3\varphi\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\pi_{es}^E} = \left(\alpha_3^{33}E_{33} + \gamma_3^{33}\overline{H_{33}}\right)\psi_3\rho_3^3\cos 3\varphi\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\pi_{es}^H} = \left(-\beta_3^{33}E_{33} + \delta_3^{33}\overline{H_{33}}\right)\psi_3\rho_3^3\sin 3\varphi\,\overrightarrow{OM}$$

$$E_{33}\left(1 - \frac{1}{b_3}\delta_3^{33}\right) - \frac{1}{a_3}\gamma_3^{33}\overline{H_{33}} = \frac{1}{a_3}\rho_{33}$$

$$\overline{H_{33}}\left(1 - \frac{1}{b_3}\delta_3^{33}\right) + \frac{1}{b_3}\beta_3^{33}E_{33} = \frac{1}{b_3}\overline{h_{33}}$$

(75)

$$E_{33}\left(987{,}5 - 5{,}65i\right) + \overline{H_{33}}\,\frac{\omega\mu_0}{K}\left(2{,}4 + 13{,}9i\right) = \left(-0{,}24 + 0{,}42i\right)\rho_{33}$$

$$E_{33}\left(1{,}16 + 1{,}39i\right)\frac{\omega\varepsilon}{K} + \overline{H_{33}}\left(97{,}6 - 15{,}5i\right) = -\left(0{,}11 + 0{,}41i\right)\overline{h_{33}}$$

$$\overrightarrow{\pi_S^E} = \overline{E_{33}}\,\psi_3\,\rho_3^3\sin 3\varphi\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\pi_S^H} = H_{33}\,\psi_3\,\rho_3^3\cos 3\varphi\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\pi_{el}^E} = \overline{\rho_{33}}\,\psi_3\,\rho_3^3\sin 3\varphi\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\pi_{el}^H} = h_{33}\,\psi_3\,\rho_3^3\cos 3\varphi\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{ES}^{E}} = \left(\alpha_3^{33} \overline{E_{33}} - \gamma_3^{33} H_{33} \right) \eta_3 \rho_3^3 \sin 3\varphi \, \vec{i_z}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{ES}^{H}} = \left(\delta_3^{33} H_{33} + \beta_3^{33} \overline{E_{33}} \right) \eta_3 \rho_3^3 \cos 3\varphi \, \vec{i_z}$$

$$\overline{E_{33}} \left(1 - \frac{1}{a_3} \alpha_3^{33} \right) + \frac{1}{a_3} \gamma_3^{33} H_{33} = \frac{1}{a_3} \overline{e_{33P}}$$

$$H_{33} \left(1 - \frac{1}{t_3} \delta_3^{33} \right) - \frac{1}{t_3} \beta_3^{33} \overline{E_{33}} = \frac{1}{t_3} h_{33P}$$

(76)

$$\overline{E_{33}} (987,5 - 5,65i) + H_{33} \frac{\omega\mu}{K} (-2,4 - 13,9i) = (-6,24 + 0,42i) \overline{e_{33P}}$$

$$-\overline{E_{33}} (1,16 + 1,39i) \frac{\omega\varepsilon}{K} + H_{33} (976 - 15,5i) = (-9,11 - 9,41i) h_{33P}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \left(E_{32} \eta_3 \rho_3^2 \cos 2\varphi + E_{22} \eta_2 \rho_2^2 \cos 2\varphi \right) \vec{i_z}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = \left(\overline{H_{32}} \eta_3 \rho_3^2 \sin 2\varphi + \overline{H_{22}} \eta_2 \rho_2^2 \sin 2\varphi \right) \vec{i_z}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{ES}^{E}} = \left(\alpha_3^{32} E_{32} + \alpha_3^{22} E_{22} + \gamma_3^{32} \overline{H_{32}} + \gamma_3^{22} \overline{H_{22}} \right) \eta_3 \rho_3^2 \cos 2\varphi \ldots$$

$$\left(\alpha_2^{32} E_{32} + \alpha_2^{22} E_{22} + \gamma_3^{32} \overline{H_{32}} + \gamma_2^{22} \overline{H_{22}} \right) \eta_2 \rho_2^2 \cos 2\varphi \, \vec{i_z}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{ES}^{H}} = \left(-\beta_3^{32} E_{32} - \beta_3^{22} E_{22} + \delta_3^{32} \overline{H_{32}} + \delta_3^{22} \overline{H_{22}} \right) \eta_3 \rho_3^2 \sin 2\varphi \, \vec{i_z}$$

$$+ \left(-\beta_2^{32} E_{32} - \beta_2^{22} E_{22} + \delta_2^{32} \overline{H_{32}} + \delta_2^{22} \overline{H_{22}} \right) \eta_2 \rho_2^2 \sin 2\varphi \, \vec{i_z}$$

$$E_{32}(9{,}96 + 9{,}41i) + E_{22}(1{,}36 + 1{,}42i) - \overline{H_{32}}\,\frac{\omega\mu_0}{K}(53{,}2 + 8{,}29i) + \overline{H_{22}}\,\frac{\omega\mu_0}{K}(4{,}43 + 3{,}85i)$$
$$= (-0{,}24 + 0{,}42i)\,\ell_{32E}$$

$$E_{32}(38 + 4i) + E_{22}(9{,}99 + 4{,}44i) - \overline{H_{32}}\,\frac{\omega\mu_0}{K}(22{,}2 + 22{,}6i) + \overline{H_{22}}\,\frac{\omega\mu_0}{K}(-6{,}1 + 8{,}5i)$$
$$= (-0{,}22 + 0{,}41i)\,\ell_{22E} \qquad (77)$$

$$E_{32}(20 + 8i)\,\frac{\omega\varepsilon}{K} - E_{22}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}(9{,}5 + 2{,}85i) + \overline{H_{32}}(9{,}90 + 2{,}8i) + \overline{H_{22}}(6{,}3 - 0{,}3i)$$
$$= (+0{,}11 - 0{,}44i)\,\overline{h_{32E}}$$

$$E_{32}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}(-2{,}27 + 22{,}41) - E_{22}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}(1{,}47 + 3{,}36i) - \overline{H_{32}}(3{,}31 + 2{,}19i) + \overline{H_{22}}(10{,}04 + 5{,}15i)$$
$$= (-0{,}65 - 0{,}48i)\,\overline{h_{22E}}$$

$$\overrightarrow{\pi_S E} = \left(\overline{E_{32}}\,\eta_3 P_3^2 \sin 2\varphi + \overline{E_{22}}\,\eta_2 P_2^2 \sin 2\varphi\right)\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\pi_S H} = \left(H_{32}\,\eta_3 P_3^2 \cos 2\varphi + H_{22}\,\eta_2 P_2^2 \cos 2\varphi\right)\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\pi_{PS} E} = \left(\alpha_3^{32}\overline{E_{32}} + \alpha_3^{22}\overline{E_{22}} - \gamma_3^{32}H_{32} - \gamma_3^{22}H_{22}\right)\eta_3 P_3^2 \sin 2\varphi\,\overrightarrow{OM}$$
$$\left(\alpha_2^{32}\overline{E_{32}} + \alpha_2^{22}\overline{E_{22}} - \gamma_2^{32}H_{32} - \gamma_2^{22}H_{22}\right)\eta_2 P_2^2 \sin 2\varphi\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\pi_{PS} H} = \left(\beta_3^{32}\overline{E_{32}} + \beta_3^{22}\overline{E_{22}} + \delta_3^{32}H_{32} + \delta_3^{22}H_{22}\right)\eta_3 P_3^2 \cos 2\varphi\,\overrightarrow{OM}$$
$$+ \left(\beta_2^{32}\overline{E_{32}} + \beta_2^{22}\overline{E_{22}} + \delta_2^{32}H_{32} + \delta_2^{22}H_{22}\right)\eta_2 P_2^2 \cos 2\varphi\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overline{E_{32}}(9{,}96 + 9{,}41i) + \overline{E_{22}}(1{,}36 + 1{,}42i) + H_{32}\,\frac{\omega\mu_0}{K}(53{,}2 + 8{,}29i) - H_{22}\,\frac{\omega\mu_0}{K}(4{,}43 + 3{,}85i)$$
$$= (-0{,}24 + 0{,}42i)\,\overline{\ell_{32E}}$$

$$\overline{E_{32}}(38 + 4i) + \overline{E_{22}}(9{,}99 + 4{,}44i) + H_{32}\,\frac{\omega\mu_0}{K}(22{,}2 + 22{,}6i) - H_{22}\,\frac{\omega\mu_0}{K}(-6{,}1 + 8{,}5i)$$
$$= (-0{,}22 + 0{,}41i)\,\overline{\ell_{22E}}$$

$$-\overline{E_{32}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}(20 + 8i) + \overline{E_{22}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}(1{,}47 + 2{,}75i) + H_{32}(9{,}90 + 2{,}8i) + H_{22}(6{,}3 - 0{,}3i) \qquad (78)$$
$$= (-0{,}11 - 0{,}41i)\,\overline{h_{32E}}$$

$$-\overline{E_{32}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}(-2{,}27 + 22{,}41i) + \overline{E_{22}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}(1{,}47 + 3{,}36i) - H_{32}(3{,}31 + 2{,}19i) + H_{22}(10{,}04 + 5{,}15i)$$
$$= (-0{,}65 - 0{,}48i)\,\overline{h_{22E}}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \left[E_{31}\,\eta_3\,P_3'\cos\gamma + E_{21}\,\eta_2\,P_2'\cos\gamma + E_{11}\,\eta_1\,P_1'\cos\gamma \right] \overrightarrow{cM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = \left[\overline{H_{31}}\,\eta_3\,P_3'\sin\gamma + \overline{H_{21}}\,\eta_2\,P_2'\sin\gamma + \overline{H_{11}}\,\eta_1\,P_1'\sin\gamma \right] \overrightarrow{cM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{eS}^E} = \left(\alpha_3^{31} E_{31} + \alpha_3^{21} E_{21} + \alpha_3'' E_{11} + \gamma_3^{31} \overline{H_{31}} + \gamma_3^{21} \overline{H_{21}} + \gamma_3'' \overline{H_{11}} \right) \eta_3 P_3' \cos\gamma \overrightarrow{cM}$$

$$\left(\alpha_2^{31} E_{31} + \alpha_2^{21} E_{21} + \alpha_2'' E_{11} + \gamma_2^{31} \overline{H_{31}} + \gamma_2^{21} \overline{H_{21}} + \gamma_2'' \overline{H_{11}} \right) \eta_2 P_2' \cos\gamma \overrightarrow{cM}$$

$$\left(\alpha_1^{31} E_{31} + \alpha_1^{21} E_{21} + \alpha_1'' E_{11} + \gamma_1^{31} \overline{H_{31}} + \gamma_1^{21} \overline{H_{21}} + \gamma_1'' \overline{H_{11}} \right) \eta_1 P_1' \cos\gamma \overrightarrow{cM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{eS}^H} = \left(-\beta_3^{31} E_{31} - \beta_3^{21} E_{21} - \beta_3'' E_{11} + \delta_3^{31} \overline{H_{31}} + \delta_3^{21} \overline{H_{21}} + \delta_3'' \overline{H_{11}} \right) \eta_3 P_3' \sin\gamma \overrightarrow{cM}$$

$$+ \left(-\beta_2^{31} E_{31} - \beta_2^{21} E_{21} - \beta_2'' E_{11} + \delta_2^{31} \overline{H_{31}} + \delta_2^{21} \overline{H_{21}} + \delta_2'' \overline{H_{11}} \right) \eta_2 P_2' \sin\gamma \overrightarrow{cM}$$

$$+ \left(-\beta_1^{31} E_{31} - \beta_1^{21} E_{21} - \beta_1'' E_{11} + \delta_1^{31} \overline{H_{31}} + \delta_1^{21} \overline{H_{21}} + \delta_1'' \overline{H_{11}} \right) \eta_1 P_1' \sin\gamma \overrightarrow{cM}$$

$$E_{31}\left(1 - \frac{1}{a_3}\alpha_3^{31}\right) - \frac{1}{a_3}\alpha_3^{21} E_{21} - \frac{1}{a_3}\alpha_3'' E_{11} - \frac{1}{a_3}\gamma_3^{31}\overline{H_{31}} - \frac{1}{a_3}\gamma_3^{21}\overline{H_{21}} - \frac{1}{a_3}\gamma_3''\overline{H_{11}} = \frac{1}{a_3} e_{31}$$

$$-\frac{1}{a_2}\alpha_2^{31} E_{31} + E_{21}\left(1 - \frac{1}{a_2}\alpha_2^{21}\right) - \frac{1}{a_2}\alpha_2'' E_{11} - \frac{1}{a_2}\gamma_2^{31}\overline{H_{31}} - \frac{1}{a_2}\gamma_2^{21}\overline{H_{21}} - \frac{1}{a_2}\gamma_2''\overline{H_{11}} = \frac{1}{a_2} e_{21} P$$

$$-\frac{1}{a_1}\alpha_1^{31} E_{31} - \frac{1}{a_1}\alpha_1^{21} E_{21} + E_{11}\left(1 - \frac{\alpha_1''}{a_1}\right) - \frac{1}{a_1}\gamma_1^{31}\overline{H_{31}} - \frac{1}{a_1}\gamma_1^{21}\overline{H_{21}} - \frac{1}{a_1}\gamma_1''\overline{H_{11}} = \frac{1}{a_1} e_{11} P$$

$$\frac{1}{t_3}\beta_3^{31} E_{31} + \frac{1}{t_3}\beta_3^{21} E_{21} + \frac{1}{t_3}\beta_3'' E_{11} + \overline{H_{31}}\left(1 - \frac{1}{t_3}\delta_3^{31}\right) - \frac{1}{t_3}\delta_3^{21}\overline{H_{21}} - \frac{1}{t_3}\delta_3''\overline{H_{11}} = \frac{1}{t_3}\overline{h_{31}}$$

$$\frac{1}{t_2}\beta_2^{31} E_{31} + \frac{1}{t_2}\beta_2^{21} E_{21} + \frac{1}{t_2}\beta_2'' E_{11} - \frac{1}{t_2}\delta_2^{31}\overline{H_{31}} + \overline{H_{21}}\left(1 - \frac{1}{t_2}\delta_2^{21}\right) - \frac{1}{t_2}\delta_2''\overline{H_{11}} = \frac{1}{t_2}\overline{h_{21}}$$

$$\frac{1}{t_1}\beta_1^{31} E_{31} + \frac{1}{t_1}\beta_1^{21} E_{21} + \frac{1}{t_1}\beta_1'' E_{11} - \frac{1}{t_1}\delta_1^{31}\overline{H_{31}} - \frac{1}{t_1}\delta_1^{21}\overline{H_{21}} + \overline{H_{11}}\left(1 - \frac{1}{t_1}\delta_1''\right) = \frac{1}{t_1}\overline{h_{11}}$$

$$E_{31}(1003-i) - E_{21}(2,18+13,8i) + E_{11}(1,83-4i) - H_{31}\frac{\omega\mu_0}{K}(23,7+21,4i)$$
$$+ H_{21}\frac{\omega\mu_0}{K}(8-9i) - H_{11}\frac{\omega\mu_0}{K}(2-7,46i) = -(0,24-0,42i)e_{31E}$$

$$E_{31}(15,8-24,7i) + E_{21}(1012+8,11) - E_{11}(1,33-5,53i) + H_{31}\frac{\omega\mu_0}{K}(124+3,47i)$$
$$- H_{21}\frac{\omega\mu_0}{K}(0,71-6,28i) - H_{11}\frac{\omega\mu_0}{K}(5,1-2,34i) = -(0,24-0,41i)e_{21E}$$

$$- E_{31}(84,6+2,76i) + E_{21}(18+44,8i) + E_{11}(1013-13i) + H_{31}\frac{\omega\mu_0}{K}(-119+107i)$$
$$+ H_{21}\frac{\omega\mu_0}{K}(4,42-57,7i) + H_{11}\frac{\omega\mu_0}{K}(1115-14i) = -(0,36+0,74i)e_{11E}$$

(99)

$$E_{31}\frac{\omega\varepsilon}{K}(-12,6+174i) + E_{21}\frac{\omega\varepsilon}{K}(142-11,6i) + E_{11}\frac{\omega\varepsilon}{K}(147-11,1i) + H_{31}(1015-57,5i)$$
$$- H_{21}(3,32+6,08i) + H_{11}(3,6+1,07i) = -(9,11+0,41i)\overline{h_{31E}}$$

$$E_{31}\frac{\omega\varepsilon}{K}(-12,6+174i) - E_{21}\frac{\omega\varepsilon}{K}(52,81+37,1) + E_{11}\frac{\omega\varepsilon}{K}(8+7,52i) - H_{31}(9,35+64,9i)$$
$$+ H_{21}(1026-10i) + H_{11}(3,55+3i) = -(0,15+0,48i)\overline{h_{21E}}$$

$$E_{31}\frac{\omega\varepsilon}{K}(66,7-98,8i) + E_{21}\frac{\omega\varepsilon}{K}(58,7-13,5i) + E_{11}\frac{\omega\varepsilon}{K}(10,6+18,7i) + H_{31}(62+147i)$$
$$+ H_{21}(14+1054i) + H_{11}(1006+18,9i) = -(0,9-0,3i)\overline{h_{11E}}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \overline{E_{31}}\,\gamma_3 P_3' \sin\gamma\,\overrightarrow{OM} + \overline{E_{21}}\,\gamma_2 P_2' \sin\gamma\,\overrightarrow{OM} + \overline{E_{11}}\,\gamma_1 P_1' \sin\gamma\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = H_{31}\,\gamma_3 P_3' \cos\gamma\,\overrightarrow{OM} + H_{21}\gamma_2 P_2' \cos\gamma\,\overrightarrow{OM} + H_{11}\gamma_1 P_1' \cos\gamma\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{eS}^E} = \left(\alpha_3^{31}\overline{E_{31}} + \alpha_3^{21}\overline{E_{21}} + \alpha_3^{11}\overline{E_{11}} - \gamma_3^{31}H_{31} - \gamma_3^{21}H_{21} - \gamma_3^{11}H_{11}\right)\gamma_3 P_3' \sin\gamma\,\overrightarrow{OM}$$

$$\left(\alpha_2^{31}\overline{E_{31}} + \alpha_2^{21}\overline{E_{21}} + \alpha_2^{11}\overline{E_{11}} - \gamma_2^{31}H_{31} - \gamma_2^{21}H_{21} - \gamma_2^{11}H_{11}\right)\gamma_2 P_2' \sin\gamma\,\overrightarrow{OM}$$

$$\left(\alpha_1^{31}\overline{E_{31}} + \alpha_1^{21}\overline{E_{21}} + \alpha_1^{11}\overline{E_{11}} - \gamma_1^{31}H_{31} - \gamma_1^{21}H_{21} - \gamma_1^{11}H_{11}\right)\gamma_1 P_1' \sin\gamma\,\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{\Pi^{H}_{es}} = \Big| \beta_3^{31}\overline{E_{31}} + \beta_3^{21}\overline{E_{21}} + \beta_3''\overline{E_{11}} + \bar{\iota}_3^{31}H_{31} + \bar{\iota}_3^{21}H_{21} + \bar{\iota}_3''H_{11}\Big) \Psi_3 P_3' e^{i\omega t}$$

$$\Big| \beta_2^{31}\overline{E_{31}} + \beta_2^{21}\overline{E_{21}} + \beta_2''\overline{E_{11}} + \bar{\iota}_2^{31}H_{31} + \bar{\iota}_2^{21}H_{21} + \bar{\iota}_2''H_{11}\Big) \Psi_2 P_2' e^{i\omega t}\,\vec{e_M}$$

$$\Big| \beta_1^{31}\overline{E_{31}} + \beta_1^{21}\overline{E_{21}} + \beta_1''\overline{E_{11}} + \bar{\iota}_1^{31}H_{31} + \bar{\iota}_1^{21}H_{21} + \bar{\iota}_1''H_{11}\Big) \Psi_1 P_1' e^{i\omega t}\,\vec{e_L}$$

Diese Gleichungen lassen sich aus (79) ableiten durch Aenderung des Vorzeichens vom β- und $\bar{\iota}$-

(80)

$$\overline{E_{31}}\,(1003-1) - \overline{E_{21}}\,(2,18+13,81) + \overline{E_{11}}\,(1,83-41) + H_{31}\,\frac{\omega\mu_0}{K}\,(23,7+21,4$$

$$- H_{21}\,\frac{\omega\mu_0}{K}\,(8,91) + H_{11}\,\frac{\omega\mu_0}{K}\,(2-7,66i) = -(6,24-6,42i)\,\overline{E_{31}}$$

$$\overline{E_{31}}\,(15,7-21,7i) + \overline{E_{21}}\,(1012+8,11i) - \overline{E_{11}}\,(4,35-5,53i) - H_{31}\,\frac{\omega\mu_0}{K}\,(124+3,47$$

$$+ H_{21}\,\frac{\omega\mu_0}{K}\,(6,71-6,28i) + H_{11}\,\frac{\omega\mu_0}{K}\,(5,1-2,34i) = -(6,21-6,41i)\,\overline{E_{21}P}$$

$$- \overline{E_{31}}\,(84,1+2,76i) + \overline{E_{21}}\,(18+44,8i) + \overline{E_{11}}\,(1013-13i) - H_{31}\,\frac{\omega\mu_0}{K}\,(-119+117i)$$

$$- H_{21}\,\frac{\omega\mu_0}{K}\,(4,42-57,7i) - H_{11}\,\frac{\omega\mu_0}{K}\,(11,5-14i) = -(6,31+6,74i)\,\overline{E_{11}P}$$

$$- \overline{E_{31}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}\,(6,84+21,9i) - \overline{E_{21}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}\,(1,42-11,6i) - \overline{E_{11}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}\,(14,7-111i) + H_{31}\,(1015-34,5$$

$$- H_{21}\,(3,32+6,08i) + H_{11}\,(3,6+1,44i) = -(6,11+6,44i)\,h_{31}P$$

$$- \overline{E_{31}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}\,(-12,6+174i) + \overline{E_{21}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}\,(58,8i-37,1) - \overline{E_{11}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}\,(2+7,52i) - H_{31}\,(9,35+14,9$$

$$+ H_{21}\,(1021-11i) + H_{11}\,(9,55+31) = -(6,65+6,42i)\,h_{21}P$$

$$- \overline{E_{31}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}\,(6,7-97,8i) - \overline{E_{21}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}\,(57,7-15,5i) - \overline{E_{11}}\,\frac{\omega\varepsilon}{K}\,(11,1+12,7i)$$

$$+ H_{31}\,(62+147i) + H_{21}\,(14+45i) + H_{11}\,(111,6+12,9i) = -(69-6,31)\,h_{11}P$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = E_{30}\,\gamma_3\,P_3\,\overrightarrow{OH} + E_{20}\,\gamma_2\,P_2\,\overrightarrow{OH} + E_{10}\,\gamma_1\,P_1\,\overrightarrow{OH}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{ES}^E} = \left(\alpha_3^{30}E_{30} + \alpha_3^{20}E_{20} + \alpha_3^{10}E_{10}\right)\gamma_3\,P_3\,\overrightarrow{OH}$$

$$+\left(\alpha_2^{30}E_{30} + \alpha_2^{20}E_{20} + \alpha_2^{10}E_{10}\right)\gamma_2\,P_2\,\overrightarrow{OH}$$

$$+\left(\alpha_1^{30}E_{30} + \alpha_1^{20}E_{20} + \alpha_1^{10}E_{10}\right)\gamma_1\,P_1\,\overrightarrow{OH}$$

$$E_{30}\left(1 - \frac{1}{a_3}\alpha_3^{30}\right) - E_{20}\frac{1}{a_3}\alpha_3^{20} - E_{10}\frac{1}{a_3}\alpha_3^{10} = \frac{1}{a_3}P_{30E}$$

$$-E_{30}\frac{1}{a_2}\alpha_2^{30} + E_{20}\left(1 - \frac{1}{a_2}\alpha_2^{20}\right) - E_{10}\frac{1}{a_2}\alpha_2^{10} = \frac{1}{a_2}P_{20E}$$

$$-E_{30}\frac{1}{a_1}\alpha_1^{30} - E_{20}\frac{1}{a_1}\alpha_1^{20} + E_{10}\left(1 - \frac{1}{a_1}\alpha_1^{10}\right) = \frac{1}{a_1}P_{10E}$$

(81)

$$E_{30}(1070 + 141) - E_{20}(21{,}1 - 6{,}981) - E_{10}(3{,}12 + 9{,}371) = \frac{1}{a_3}P_{30E}$$

$$E_{30}(19{,}5 + 0{,}641) + E_{20}(981 + 5{,}851) - E_{10}(3{,}081 + 5{,}721) = \frac{1}{a_2}P_{20E}$$

$$E_{30}(18{,}14 - 50{,}51) + E_{20}(10{,}9 + 3{,}471) + E_{10}(1010 - 21{,}81) = \frac{1}{a_1}P_{10E}$$

$$\overrightarrow{\Pi_5^H} = H_{30}\,\eta_3 P_3\,\overrightarrow{OM} + H_{20}\,\eta_2 P_2\,\overrightarrow{CM} + H_{10}\,\eta_1 P_1\,\overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{\Pi_{es}^H} = \left(\delta_3^{30} H_{30} + \delta_3^{20} H_{20} + \delta_3^{10} H_{10}\right)\eta_3 P_3\,\overrightarrow{CM}$$

$$+\left(\delta_2^{30} H_{30} + \delta_2^{20} H_{20} + \delta_2^{10} H_{10}\right)\eta_2 P_2\,\overrightarrow{CM}$$

$$+\left(\delta_1^{30} H_{30} + \delta_1^{20} H_{20} + \delta_1^{10} H_{10}\right)\eta_1 P_1\,\overrightarrow{CM}$$

$$H_{30}\left(1 - \frac{1}{t_3}\delta_3^{30}\right) - \frac{1}{t_3}\delta_3^{20} H_{20} - \frac{1}{t_3}\delta_3^{10} H_{10} = \frac{1}{t_3} h_{30E}$$

$$-H_{30}\frac{1}{t_2}\delta_2^{30} + H_{20}\left(1 - \frac{1}{t_2}\delta_2^{20}\right) - \frac{1}{t_2}\delta_2^{10} H_{10} = \frac{1}{t_2} h_{20E}$$

$$-H_{30}\frac{1}{t_1}\delta_1^{30} - H_{20}\frac{1}{t_1}\delta_1^{20} + H_{10}\left(1 - \frac{1}{t_1}\delta_1^{10}\right) = \frac{1}{t_1} h_{10E}$$

(82)

$$H_{30}(982 - 44{,}5i) + H_{20}(71 - 3i) + H_{10}(3 + 6i) = -(9{,}11 + 0{,}41i)\,h_{30E}$$

$$H_{30}(580 + 465i) + H_{20}(1050 - 18i) + H_{10}(-21 + 85i) = -(4{,}65 + 0{,}48i)\,h_{20E}$$

$$H_{30}(9{,}48 - 15{,}5i) + H_{20}(11{,}4 - 0{,}5i) + H_{10}(996 + 4{,}2i) = -(9{,}9 - 0{,}3i)\,h_{10E}$$

Die Gleichungen (75) bis (82) erlauben es die Koeffizienten $E, \bar{E}, H, \bar{H}$ auszurechnen. Wenn man die primäre Erregung kennt.
Es handelt sich darum die Koeffizienten $e, \bar{e}, h, \bar{h}$ der primären Erregung auszurechnen.

Die Primäre Erregung

Im Medium (I) Luft komme die ebene Welle an:

$$\overrightarrow{\Pi^E} = e^{ik_0[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi_0-\varphi)]}\,\vec{w}$$

$$\varphi_0 = 0 \qquad \theta_0 = \frac{3\pi}{4}$$

sie wird in der Erde gebrochen in:

$$\overrightarrow{\Pi_g^E} = \frac{2\cos\theta_0}{n^2\cos\theta_0 + \sqrt{n^2-\sin^2\theta_0}}\, e^{ik_0\gamma_0 d - ik_1\gamma_1 d}\, e^{ik_0[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi_0-\varphi)]}\,\vec{w}$$

$$n = 2 \qquad \cos\theta_0 = \gamma_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\theta_1 = -0{,}935 = \gamma_1 \qquad \sin\theta_1 = 0{,}353$$

$$\overrightarrow{\Pi_g^E} = -(0{,}27 + 0{,}13i)\, e^{ik_0[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi_0-\varphi)]}\,\vec{w}$$

oder aber:

$$\overrightarrow{\Pi^H} = e^{ik_0[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi_0-\varphi)]}\,\vec{w}$$

wird in der Erde gebrochen in

$$\overrightarrow{\Pi_g^H} = \frac{2\cos\theta_0}{\cos\theta_0 + \sqrt{n^2-\sin^2\theta_0}}\, e^{ik_0\gamma_0 d - ik_1\gamma_1 d}\, e^{ik_0[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi_0-\varphi)]}\,\vec{w}$$

$n = 2 \qquad \cos\theta_0 = \gamma_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad Kd = 2\pi \qquad Kod = \pi$

$$\overrightarrow{\Pi_g^H} = -(0{,}49 + 0{,}24i)\, e^{iKr\left[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)\right]}\,\vec{w}$$

(83)

$$\overrightarrow{\Pi^E} = e^{iKor\left[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi\right]}\,\vec{w}$$

$$\cos\theta_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{\Pi_g^E} = -(0{,}27 + 0{,}13i)\, e^{iKr\left[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos\varphi\right]}\,\vec{w}$$

$$\cos\theta_1 = -0{,}935 \qquad \sin\theta_1 = 0{,}354$$

$$\overrightarrow{\Pi^H} = e^{iKor\left[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi\right]}\,\vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi_g^H} = -(0{,}49 + 0{,}24i)\, e^{iKr\left[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos\varphi\right]}\,\vec{w}$$

Die Formel (48) gibt:

$$\overrightarrow{\Pi_g^E} = -(0{,}27 + 0{,}13i)\, e^{iKr\left[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos\varphi\right]}\,\vec{w}$$

Äquivalent mit dem Satz:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Pi^E} = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{\Pi^H} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{OM} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{A} = (0{,}27 + 0{,}13i)\,\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,\sin\theta_1 \sum_{n=1}^{3} i^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\psi_n(Kr) \times$$

$$\times \left\{ P_n(\cos\theta)\,P_n'(\cos\theta_1) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{n-m!}{n+m!}\,P_n^m(\cos\theta) \times \frac{d}{d\theta_1}\,P_n^m(\cos\theta_1)\cos m\varphi \right\}$$

+ usw. vernachlässigt

$$\overline{B} = -(0{,}27+0{,}13i)\,\omega\varepsilon\,\sin\theta_1 \sum_{n=1}^{3} i^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\psi_n(kr)\,\times$$

$$\times\,\frac{2}{\sin\theta_1}\left\{\sum_{m=1}^{n} m\,\frac{n-m!}{n+m!}\,P_n^m(\cos\theta)\,P_n^m(\cos\theta_1)\,\sin m\varphi\right\}$$

Langwierige und langweilige Rechnungen geben:

$$\overline{A} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,\times$$

$$-\psi_1 P_1(50{,}5+24{,}4i)\cdot 10^{-3} + \psi_1 P_1'\cos\varphi(134+64{,}2i)\cdot 10^{-3}$$

$$\psi_2 P_2(-37{,}9+77{,}7i)\cdot 10^{-3} + \psi_2 P_2'\cos\varphi(28{,}7-59{,}6i)\cdot 10^{-3}$$

$$+\,\psi_2 P_2^2\cos 2\varphi\,(6{,}3-13{,}1i)\cdot 10^{-3}$$

$$\psi_3 P_3(99+47{,}8i)\cdot 10^{-3} + \psi_3 P_3'\cos\varphi(-27{,}7-13{,}3i)\cdot 10^{-3}$$

$$\psi_3 P_3^2\cos 2\varphi(-8-3{,}9i)\cdot 10^{-3} + \psi_3 P_3^3\cos 3\varphi(-0{,}8-0{,}39i)\cdot 10^{-3}$$

(84)

$$-\overline{B} = \omega\varepsilon\,\times$$

$$\psi_1 P_1'\sin\varphi(-137-66i)\cdot 10^{-3} + \psi_2 P_2'\sin\varphi(-35{,}8+74{,}3i)\cdot 10^{-3}$$

$$+\psi_2 P_2^2\sin 2\varphi(-6{,}85+14{,}3i)\cdot 10^{-3} + \psi_3 P_3'\sin\varphi(47+22{,}6i)\cdot 10^{-3}$$

$$+\,\psi_3 P_3^2\sin 2\varphi(9{,}1+4{,}42i)\cdot 10^{-3} + \psi_3 P_3^3\sin 3\varphi(0{,}85+0{,}41i)\cdot 10^{-3}$$

das sind die Betragen Potentiale der Welle

$$\overrightarrow{\Pi_y E} = -(0{,}27+0{,}13i)\,e^{+ikr[\cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1\cos\varphi]}$$

$\vec{m}$

Ähnliche Rechnungen geben für das zweite Beispiel:

$$\overline{A} = \omega \mu_0 \times$$

$$\psi_1 P_1^1 \sin\varphi\,(259 + 122 i)\cdot 10^{-3} + \psi_2 P_2^1 \sin\varphi\,(-66 + 135 i)\cdot 10^{-3}$$

$$\psi_2 P_2^2 \sin 2\varphi\,(-12{,}7 + 25{,}9 i)\cdot 10^{-3} + \psi_3 P_3^1 \sin\varphi\,(85 + 41{,}8 i)\cdot 10^{-3}$$

$$\psi_3 P_3^2 \sin 2\varphi\,(16{,}7 + 8{,}15 i)\cdot 10^{-3} + \psi_3 P_3^3 \sin 3\varphi\,(1{,}56 + 0{,}765 i)\cdot 10^{-3}$$

$$\overline{B} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0} \times$$

(85) $$\psi_1 P_1 (-91{,}7 - 45 i)\cdot 10^{-3} + \psi_1 P_1^1 \cos\varphi\,(242 + 190 i)\cdot 10^{-3}$$

$$+ \psi_2 P_2 (-73{,}5 + 143 i)\cdot 10^{-3} + \psi_2 P_2^1 \cos\varphi\,(55{,}8 - 108 i)\cdot 10^{-3}$$

$$+ \psi_2 P_2^2 \cos 2\varphi\,(12{,}2 - 23{,}7 i)\cdot 10^{-3}$$

$$+ \psi_3 P_3 (180 + 93 i)\cdot 10^{-3} + \psi_3 P_3^1 \cos\varphi\,(-50 - 25{,}9 i)\cdot 10^{-3}$$

$$+ \psi_3 P_3^2 \cos 2\varphi\,(-14{,}5 - 7{,}5 i)\cdot 10^{-3} + \psi_3 P_3^3 \cos 3\varphi\,(-1{,}42 - 0{,}76 i)\cdot 10^{-3}$$

das sind die Debyschen Potentiale der Welle

$$\overrightarrow{\Pi_q^H} = -(0{,}49 + 0{,}24 i)\, e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos\varphi]}\, \vec{w}$$

(84) und (85) geben uns die Debyschen Potentiale der primären Erregung an.
Die Koeffizienten e_ℓ $\overline{e_\ell}$ h_ℓ $\overline{h_\ell}$ wie sie auf der rechten Seite der Gleichungen (75) bis (82) auftreten sind also bekannt; es genügt sie in die Gleichungen (84) und (85) aufzunehmen.

Erstes Beispiel $\overrightarrow{\Pi_0^E} = -(0{,}27 + 0{,}13i)\, e^{ikr[\,]}\overrightarrow{w}$

Die Koeffizienten $\bar{e}$ und h sind null. Infolgedessen sind die Koeffizienten E und H null. Wir haben die Systeme (75), (77) (79) (81) zu lösen. Wir bemerken, daß die Koeffizienten der Hauptdiagonale viel größer sind als die anderen, das entspricht der Tatsache, daß der Anteil der primären Erregung in dem auf der Kugel einfallenden elektromagnetischen Zustand vorwiegend ist.
Wir wollen hier die Vereinbarung treffen, daß außerhalb der Hauptdiagonale die Koeffizienten vernachlässigbar sind. Langwierige Rechnungen liefern folgende Ergebnisse:

$E_{10} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\ 45i \cdot 10^{-3}$

$E_{20} = -\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(23{,}5 + 31{,}4i) \cdot 10^{-3}$

$E_{30} = -\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(41 - 27i) \cdot 10^{-3}$

$E_{11} = -\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\ 122i \cdot 10^{-3}$

$E_{21} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(18 - 24i) \cdot 10^{-3}$

$E_{31} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(12 - 23i) \cdot 10^{-3}$

$E_{32} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(0{,}35 - 0{,}244i) \cdot 10^{-3}$

$E_{22} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(4{,}1 + 4{,}3i) \cdot 10^{-3}$

$E_{33} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(0{,}36 - 0{,}246i) \cdot 10^{-3}$

$\overline{H_{11}} = -\omega\varepsilon\,(145 + 19i) \cdot 10^{-3}$

$\overline{H_{21}} = \omega\varepsilon\,(-59 + 40i) \cdot 10^{-3}$

$\overline{H_{31}} = \omega\varepsilon\,(-4 + 21{,}8i) \cdot 10^{-3}$

$\overline{H_{32}} = \omega\varepsilon\,(-0{,}8 + 4{,}2i) \cdot 10^{-3}$

$\overline{H_{22}} = \omega\varepsilon\,(-11{,}3 + 6i) \cdot 10^{-3}$

$\overline{H_{33}} = \omega\varepsilon\,(-0{,}068 + 0{,}38i) \cdot 10^{-3}$

Zweites Beispiel $\overrightarrow{\Pi g^{H}} = -(0{,}49+0{,}24i)\, e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1\cos\varphi]}\, \overrightarrow{w}$

$$H_{10} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(96+13i).10^{-3}$$
$$H_{20} = -\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(-120+56i).10^{-3}$$
$$H_{30} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(16{,}3-84i).10^{-3}$$

$\overline{E_{31}} = -\omega\mu_0(38-24i).10^{-3}$	$H_{31} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(-45+23i).10^{-3}$
$\overline{E_{21}} = -\omega\mu_0(41{,}5+55i).10^{-3}$	$H_{21} = -\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(90-47i).10^{-3}$
$\overline{E_{11}} = -\omega\mu_0(3{,}5+236i).10^{-3}$	$H_{11} = -\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(278+99i).10^{-3}$
$\overline{E_{32}} = \omega\mu_0(-7{,}5+5i).10^{-3}$	$H_{32} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(6{,}8i-1{,}55).10^{-3}$
$\overline{E_{22}} = -\omega\mu_0(8+11i).10^{-3}$	$H_{22} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(-20+10i).10^{-3}$
$\overline{E_{33}} = \omega\mu_0(-0{,}7+0{,}48i).10^{-3}$	$H_{33} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,(-0{,}154+0{,}7i).10^{-3}$

Erstes Beispiel

Seite 72,73 wurde gezeigt, daß die im Medium (II) Erde ebene Wel

$$\overrightarrow{\Pi^{E}} = e^{ikr[\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)]}\,\overrightarrow{w}$$

gebrochen wird im Medium (I, Luft) in:

$$\overrightarrow{\Pi g^{E}} = \frac{2n^2\cos\alpha\, e^{id(k\cos\alpha-k_0\cos\alpha_0)}}{\cos\alpha+n\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}} \times e^{ik_0r[\cos\theta\cos\alpha_0+\sin\theta\sin\alpha_0\cos(\varphi-\beta)]}\,\overrightarrow{w}$$

andererseits haben wir gesehen:

$$\psi_n(kr)\,P_n^m(\cos\theta)\,{\cos \atop \sin} m\varphi = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W P_n^m(\cos\alpha)\,{\cos \atop \sin} m\beta\, e^{ikr\cos\gamma}\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

Auf Seite 73 wurde gezeigt, daß

$$\overrightarrow{\Pi^H} = e^{ik_2[\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos(\psi-\beta)]}\,\vec{w}$$

gebrochen wird in:

$$\overrightarrow{\Pi_g^H} = \frac{2n\cos\alpha}{n\cos\alpha + \sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}\, e^{ik_1 d(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)} \cdot e^{ik_2[\cos\beta\cos\alpha_0 + \sin\beta\sin\alpha_0\cos(\psi-\beta)]}\,\vec{w}$$

infolgedessen können wir eine Integraldarstellung der Hertzschen magnetischen und elektrischen Vektoren angeben.
Vorerst verwenden wir die Formeln (52a), (52 b), (52 c).
Man findet für das Streufeld im Innern der ERde:

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \frac{E_{10}}{K}\eta_0 P_0\,\vec{w} + \frac{E_{20}}{K}3\eta_1 P_1\,\vec{w} + \frac{E_{30}}{K}\left(5\eta_2 P_2 - \eta_0 P_0\right)\vec{w}$$

$$- \frac{E_{11}}{K}\eta_0 P_0\,\vec{u} + \frac{E_{21}}{K}\left(3\eta_1 P_1'\cos\psi\,\vec{w} - 3\eta_1 P_1\,\vec{u}\right)$$

$$\frac{E_{31}}{K}\left(5\eta_2 P_2'\cos\psi\,\vec{w} - 5\eta_2 P_2\,\vec{u} + \eta_0 P_0\,\vec{u}\right)$$

$$\frac{E_{32}}{K}\left(5\eta_2 P_2^2\cos 2\psi\,\vec{u} + 10\eta_2 P_2'\sin\psi\,\vec{v} - 10\eta_2 P_2'\cos\psi\,\vec{u}\right)$$

$$\frac{E_{22}}{K}\left(-6\eta_1 P_1'\cos\psi\,\vec{u} + 6\eta_1 P_1'\sin\psi\,\vec{v}\right)$$

$$\frac{E_{33}}{K}\left(15\eta_2 P_2^2\sin 2\psi\,\vec{v} - 15\eta_2 P_2^2\cos 2\psi\,\vec{u}\right)$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = -\frac{\overline{H_{11}}}{K}\eta_0 P_0\,\vec{v} + \frac{\overline{H_{21}}}{K}\left(3\eta_1 P_1'\sin\varphi\,\vec{w} - 3\eta_1 P_1\,\vec{v}\right)$$

$$+\frac{\overline{H_{31}}}{K}\left(5\eta_2 P_2'\sin\varphi\,\vec{w} - 5\eta_2 P_2\,\vec{v} + \eta_0 P_0\,\vec{u}\right)$$

$$+\frac{\overline{H_{32}}}{K}\left(5\eta_2 P_2^2\sin 2\varphi\,\vec{w} - 10\eta_2 P_2'\sin\varphi\,\vec{u} - 10\eta_2 P_2'\cos\varphi\,\vec{v}\right)$$

$$+\frac{\overline{H_{22}}}{K}\left(-6\eta_1 P_1'\sin\varphi\,\vec{u} - 6\eta_1 P_1'\cos\varphi\,\vec{v}\right) + \frac{\overline{H_{33}}}{K}\left(-15\eta_2 P_2^2\sin 2\varphi\,\vec{u} - 15\eta_2 P_2^2\right.$$

Man senke sich eine Umordnung dieser beiden Vektoren nach eine Entwicklung der Summanden nach ebenen Wellen unter Verwendung der Formel (68), eine Aufspaltung in E-Feld und H-Feld bezüglich der z Achse unter Verwendung der Formeln (41) bis (44). Und schließlich die Anwendung der Fresnelschen Gesetze

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \left[\frac{E_{10}}{K}\eta_0 P_0 + 3\frac{E_{21}}{K}\eta_1 P_1 + \frac{E_{30}}{K}\left(5\eta_2 P_2 - \eta_0 P_0\right) + 3\frac{E_{21}}{K}\eta_1 P_1'\cos\varphi\right.$$
$$\left. + 5\frac{E_{31}}{K}\eta_2 P_2'\cos\varphi + 5\frac{E_{32}}{K}\eta_2 P_2^2\cos 2\varphi\right]\vec{w}$$

$$+\left[-\frac{E_{11}}{K}\eta_0 P_0 - 3\frac{E_{01}}{K}\eta_1 P_1 - 5\frac{E_{31}}{K}\eta_2 P_2 + \frac{E_{31}}{K}\eta_0 P_0 - 10\frac{E_{32}}{K}\eta_2 P_2'\cos\varphi\right.$$
$$\left. - 6\frac{E_{22}}{K}\eta_1 P_1'\cos\varphi - 15\frac{E_{33}}{K}\eta_2 P_2^2\cos 2\varphi\right]\vec{u}$$

$$\left[10\frac{E_{32}}{K}\eta_2 P_2'\sin\varphi + 6\frac{E_{22}}{K}\eta_1 P_1'\sin\varphi + 15\frac{E_{33}}{K}\eta_2 P_2^2\sin 2\varphi\right]\vec{v}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = \left[3\frac{\overline{H_{21}}}{K}\eta_1 P_1'\sin\varphi + 5\frac{\overline{H_{31}}}{K}\eta_2 P_2'\sin\varphi + 5\frac{\overline{H_{32}}}{K}\eta_2 P_2^2\sin 2\varphi\right]\vec{w}$$

$$+\left[-\frac{\overline{H_{11}}}{K}\eta_0 P_0 - 3\frac{\overline{H_{21}}}{K}\eta_1 P_1 - 5\frac{\overline{H_{31}}}{K}\eta_2 P_2 + \frac{\overline{H_{31}}}{K}\eta_0 P_0 - 10\frac{\overline{H_{32}}}{K}\eta_2 P_2'\cos\varphi\right.$$
$$\left. - 6\frac{\overline{H_{22}}}{K}\eta_1 P_1'\cos\varphi - 15\frac{\overline{H_{33}}}{K}\eta_2 P_2^2\cos 2\varphi\right]\vec{v}$$

$$\left[-10\frac{\overline{H_{32}}}{K}\eta_2 P_2'\sin\varphi - 6\frac{\overline{H_{22}}}{K}\eta_1 P_1'\sin\varphi - 15\frac{\overline{H_{33}}}{K}\eta_2 P_2^2\sin 2\varphi\right]\vec{u}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-w}^{\infty} F(\cos\alpha, \beta)\, e^{-ikz\cos\gamma} \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta \, \vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-w}^{\infty} G(\cos\alpha, \beta)\, e^{-ikz\cos\gamma} \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta \, \vec{w}$$

mit:

$$K\, F(\cos\alpha, \beta) = E_{10} P_0 - 3i E_{20} P_1 - E_{30}(5P_2 + P_0)$$

$$- 5 E_{31} P_2^1 \cos\beta - 5 E_{32} P_2^2 \cos 2\beta - 3i E_{21} P_1' \cos\beta$$

$$- \frac{\cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big[- E_{11} P_0 + 3i E_{22} P_1 + 5 E_{31} P_2 + E_{31} P_0$$

$$+ 10 E_{32} P_2' \cos\beta + 6i E_{22} P_1' \cos\beta + 15 E_{33} P_2^2 \cos 2\beta \Big]$$

$$- \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big[- 10 E_{32} P_2' \sin\beta - 6i E_{22} P_1' \sin\beta - 15 E_{33} P_2^2 \sin 2\beta \Big]$$

$$- \frac{w\mu_0 \cos\beta}{K \sin\alpha}\Big[- \overline{H_{11}} P_0 + 3i \overline{H_{21}} P_1 + 5 \overline{H_{31}} P_2 + \overline{H_{31}} P_0 + 10 \overline{H_{32}} P_2' \cos\beta$$

$$+ 6i \overline{H_{22}} P_1' \cos\beta + 15 \overline{H_{33}} P_2^2 \cos 2\beta \Big]$$

$$\frac{w\mu_0}{K} \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\Big[10 \overline{H_{32}} P_2' \sin\beta + 6i \overline{H_{22}} P_1' \sin\beta + 15 \overline{H_{33}} P_2^2 \sin 2\beta \Big]$$

$$K\,f(\cos\alpha,\beta) = -\frac{\omega\varepsilon \sin\beta}{K\sin\alpha}\Big[-E_{11}P_0 + 3i\,E_{21}P_1 + 5E_{31}P_2 + E_{31}P_0$$

$$+10\,E_{32}P_1'\cos\beta + 6i\,E_{22}P_1'\cos\beta + 15\,E_{33}P_2'^{2}\cos 2\beta\Big]$$

$$\frac{\omega\varepsilon\cos\beta}{K\sin\alpha}\Big[-10E_{32}P_2'\sin\beta - 6i\,E_{22}P_1'\sin\beta - 15\,E_{33}P_2'^{2}\sin 2\beta\Big]$$

$$-\Big[3i\,\overline{H_{21}}\,P_1'\sin\beta + 5\overline{H_{31}}\,P_2'\sin\beta + 5\overline{H_{32}}\,P_2'^{2}\sin 2\beta\Big]$$

$$-\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big[-\overline{H_{11}}\,P_0 + 3i\,\overline{H_{21}}\,P_1 + 5\overline{H_{31}}\,P_2 + \overline{H_{31}}\,P_0 + 10\,\overline{H_{32}}\,P_2'\cos\beta$$

$$+6i\,\overline{H_{22}}\,P_1'\cos\beta + 15\,\overline{H_{33}}\,P_2'^{2}\cos 2\beta\Big]$$

$$-\frac{\cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big[10\,\overline{H_{32}}\,P_2'\sin\beta + 6i\,\overline{H_{22}}\,P_1'\sin\beta + 15\,\overline{H_{33}}\,P_2'^{2}\sin 2\beta\Big]$$

Man möge sich daran erinnern, daß die Vektoren $\overrightarrow{\Pi^E_S}$ und $\overrightarrow{\Pi^H_S}$ sich auf das Streufeld im Innern der Erde beziehen.
Um das Streufeld in der Luft zu erhalten, verwendet man noch die Fresnelschen Formeln.
Im Rahmen dieses ersten Beipieles - die primäre Erregung ist in der Luft durch:

$$\overrightarrow{\Pi^E} = e^{ikr[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]}\,\vec{w}$$

dargestellt - begnügen wir uns den Streuquerschnitt in einigen Richtungen der Meridianebene y = o auszurechnen. Für $\beta = o$ oder π (d.h. in dieser Ebene) ist KG($\cos\alpha, \beta$) offensichtlich null, infolgedessen liefert für diese speziellen Richtungen die magnetische Partialwelle keinen Beitrag.
Was die elektrische Partialwelle des Streufeldes in der Luft betrifft, können wir nach Anwendung der Fresnelschen Formeln (5o) S. 44 und Ersetzung von $\sin\alpha\,d\alpha$ durch

$$\frac{\cos\alpha_0}{n^2\sin\alpha\cos\alpha}\,\sin\alpha_0\,d\alpha_0$$

den elektrischen Hertzschen Vektor wie folgt schreiben:

$$\overrightarrow{\Pi_q^E} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2} F(\cos\alpha,\beta)\,\frac{2n^2\cos\alpha\, e^{id(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)}}{\cos\alpha + n\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}} \times \frac{\cos\alpha_0}{n^2\cos\alpha}$$

$$e^{iKor[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\beta)]}\,\sin\alpha_0\,d\alpha_0\,d\beta\,\vec{w}$$

Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf die Größe:

$$\mathcal{F}(\cos\alpha_0,\beta) = F(\cos\alpha,\beta)\,\frac{2n^2\cos\alpha\, e^{id(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)}}{\cos\alpha + n\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}} \cdot \frac{\cos\alpha_0}{n^2\cos\alpha}$$

Diese soll in die erste Gleichung (73 a) eingetragen werden um zum Streuquerschnitt zu gelangen

$$\sigma = \frac{1}{K_0^2}\,\frac{\sin^2\alpha_0}{\sin^2\theta_1}\,\left|\mathcal{F}(\cos\alpha_0,\beta)\right|^2$$

Nach leichten Umrechnungen und unter Berücksichtigung daß $\sin^2\alpha_2 = \frac{1}{2}$ und daß $k_0^2 = 4\pi^2 n = 2$ wird

$$\sigma = \frac{8}{\pi^2} \frac{\cos^2\alpha_0 \sin^2\alpha}{(\cos\alpha + 2\cos\alpha_0)^2} \left| F(\cos\alpha, \beta) \right|^2$$

wobei $\sin\alpha_0 = n \sin\alpha$

Wir geben den Wert von σ_m der folgenden Tabelle für verschiedene Werte des Beobachtungswinkel α_0 und für β entweder 0 oder π. Dabei erinnern wir uns daran, daß die ebene einfallende Welle in der Luft die Richtung $\varphi_0 = 0$ und $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$ hat.

α_0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\frac{\cos^2\alpha_0 \sin^2\alpha}{(\cos\alpha + 2\cos\alpha_0)^2}$	0,001831	0,00643	0,01152	0,01697	0,02205	0
$10^3 F(\cos\alpha, \beta=0)$	-1,603 -1,381	-,436 -,921	-,250 ,121	-,168 -,110 i	-,131 -,111	-,127 -,114 i
$10^3 F(\cos\alpha, \beta=\pi)$	-,914 -,174 i	-,403 -,991	-,262 ,551	-,213 -,201	-,136 ,31	-,146 ,21
$\left\|F(\cos\alpha, 0)\right\|^2$	1,025	0,198	0,0625	0,0403	0,0295	0,0291
$\left\|F(\cos\alpha, \pi)\right\|^2$	0,866	0,172	0,0716	0,0458	0,0324	0,0384
$\sigma_m^{\beta=0}$ cm^2	15,2	10,3	5,73	4,24	1,92	0
$\sigma_m^{\beta=\pi}$ cm^2	12,8	8,96	6,57	4,81	2,51	0

In der anliegenden Figur ist die Rückstrahlcharakteristik der Anordnung unter den genannten Voraussetzungen gezeichnet.

Zweites Beispiel

Seite 104 werden die Koeffizienten die die Strahlung der Kugel in diesem Beispiel kennzeichnen angegeben. Mit Hilfe der Formeln (52 a) (52 b) (52 c) kann man das Streufeld im Innern der Erde in folgender Gestalt geben:

$$\overrightarrow{\Pi^E_S} = \frac{\overline{E_{31}}}{K}\left(5\eta_2 P_2' \sin\varphi\,\vec{w} - 5\eta_2 P_2\,\vec{v} + \eta_0 P_0\,\vec{v}\right)$$

$$+ \frac{\overline{E_{21}}}{K}\left(3\eta_1 P_1' \sin\varphi - 3\eta_1 P_2\right)\vec{w} - \frac{\overline{E_{11}}}{K}\eta_0 P_0\,\vec{v}$$

$$+ \frac{\overline{E_{22}}}{K}\left(-6\eta_1 P_1' \sin\varphi\,\vec{u} - 6\eta_1 P_1' \cos\varphi\,\vec{v}\right)$$

$$+ \frac{\overline{E_{32}}}{K}\left(5\eta_2 P_2^2 \sin 2\varphi\,\vec{w} - 10\eta_2 P_2' \sin\varphi\,\vec{u} - 10\eta_2 P_2' \cos\varphi\,\vec{v}\right)$$

$$+ \frac{E_{33}}{K}\left(-15\eta_2 P_2^2 \sin 2\varphi\,\vec{u} - 15\eta_2 P_2^2 \cos 2\varphi\,\vec{v}\right)$$

$$\overrightarrow{\Pi^H_S} = \frac{H_{11}}{K}\eta_0 P_0\,\vec{w} + \frac{H_{20}}{K}3\eta_1 P_1\,\vec{w} + \frac{H_{30}}{K}\left(5\eta_2 P_2 - \eta_0 P_0\right)\vec{w}$$

$$+ \frac{H_{31}}{K}\left(5\eta_2 P_2' \cos\varphi\,\vec{w} - 5\eta_2 P_2\,\vec{u} + \eta_0 P_0\,\vec{u}\right)$$

$$+ \frac{H_{21}}{K}\left(3\eta_1 P_1' \cos\varphi\,\vec{w} - 3\eta_1 P_1\,\vec{u}\right) - \frac{H_{11}}{K}\eta_0 P_0\,\vec{u}$$

$$+ \frac{H_{32}}{K}\left(5\eta_2 P_2^2 \cos 2\varphi\,\vec{w} + 10\eta_2 P_2' \sin\varphi\,\vec{u} - 10\eta_2 P_2' \cos\varphi\,\vec{v}\right)$$

$$+ \frac{H_{22}}{K}\left(-6\eta_1 P_1' \cos\varphi\,\vec{u} + 6\eta_1 P_1' \sin\varphi\,\vec{v}\right)$$

$$+ \frac{H_{33}}{K}\left(15\eta_2 P_2^2 \sin 2\varphi\,\vec{v} - 15\eta_2 P_2^2 \cos 2\varphi\,\vec{u}\right)$$

Wir ordnen $\overrightarrow{\Pi_S^E}$ und $\overrightarrow{\Pi_S^H}$ nach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ um und erhalten:

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = -\Big(6\eta_1 P_1' \sin\gamma \frac{\overline{E_{22}}}{K} + 10 \frac{\overline{E_{32}}}{K} \eta_2 P_2' \sin\gamma + 15 \frac{\overline{E_{33}}}{K} \eta_2 P_2^2 \sin 2\gamma \Big) +$$

$$+ \Big(-5 \frac{\overline{E_{31}}}{K} \eta_2 P_2 + \frac{\overline{E_{31}}}{K} \eta_0 P_0 - 3 \frac{\overline{E_{21}}}{K} \eta_1 P_1 - \frac{\overline{E_{11}}}{K} \eta_0 P_0 - 6 \frac{\overline{E_{22}}}{K} \eta_1 P_1' \cos\gamma$$

$$- 10 \frac{\overline{E_{32}}}{K} \eta_2 P_2' \cos\gamma - 15 \frac{\overline{E_{33}}}{K} \eta_2 P_2^2 \cos 2\gamma \Big) \vec{v}$$

$$+ \Big(5 \frac{\overline{E_{31}}}{K} \eta_2 P_2' \sin\gamma + 3 \frac{\overline{E_{21}}}{K} \eta_1 P_1' \sin\gamma + 5 \frac{\overline{E_{32}}}{K} \eta_2 P_2^2 \sin 2\gamma \Big) \vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = \Big(\frac{H_{31}}{K} \eta_0 P_0 - 5 \frac{H_{31}}{K} \eta_2 P_2 - 3 \frac{H_{21}}{K} \eta_1 P_1 - \frac{H_{11}}{K} \eta_0 P_0$$

$$- 10 \frac{H_{32}}{K} \eta_2 P_2' \cos\gamma - 6 \frac{H_{22}}{K} \eta_1 P_1' \cos\gamma - 15 \frac{H_{33}}{K} \eta_2 P_2^2 \cos 2\gamma \Big) \vec{u}$$

$$\Big(10 \frac{H_{32}}{K} \eta_2 P_2' \sin\gamma + 6 \frac{H_{22}}{K} \eta_1 P_1' \sin\gamma + 15 \frac{H_{33}}{K} \eta_2 P_2^2 \sin 2\gamma \Big) \vec{v}$$

$$+ \Big(\frac{H_{10}}{K} \eta_0 P_0 + 3 \frac{H_{20}}{K} \eta_1 P_1 + 5 \frac{H_{30}}{K} \eta_2 P_2 - \frac{H_{30}}{K} \eta_0 P_0 + 5 \frac{H_{31}}{K} \eta_2 P_2' \cos\gamma$$

$$+ 3 \frac{H_{21}}{K} \eta_1 P_1' \cos\gamma + 5 \frac{H_{32}}{K} \eta_2 P_2^2 \cos 2\gamma \Big) \vec{w}$$

Wir ändern die Form von $\overrightarrow{\Pi_S^E}$ und $\overrightarrow{\Pi_S^H}$ ab

$$\overrightarrow{\Pi_S^E} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\cos\alpha, \beta) e^{iKr\cos\gamma'} \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta \, \vec{w}$$

$$\overrightarrow{\Pi_S^H} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} G(\cos\alpha, \beta) e^{iKr\cos\gamma} \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta \, \vec{w}$$

$$KF(\cos\alpha, \beta) = -5 \overline{E_{31}} P_2' \sin\beta - 3i \overline{E_{21}} P_1' \sin\beta - 5 \overline{E_{32}} P_2^2 \sin 2\beta$$

$$- \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha} \Big[+5 \overline{E_{31}} P_2 + \overline{E_{31}} P_0 + 3i \overline{E_{21}} P_1 - \overline{E_{11}} P_0 + 6i \overline{E_{22}} P_1' \cos\beta$$

$$+ 10 \overline{E_{32}} P_2' \cos\beta + 15 \overline{E_{33}} P_2^2 \cos 2\beta \Big]$$

$$- \frac{\cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big(6\,\overline{E_{22}}\,P_1'\sin\beta + 10\,\overline{E_{32}}\,P_2'\sin\beta + 15\,\overline{E_{33}}\,P_2^2\sin 2\beta\Big)$$

$$\frac{\omega\mu_0\sin\beta}{K\sin\alpha}\Big(H_{31}P_0 + 5H_{31}P_2 + 3i\,H_{21}P_1 - H_{11}P_0 + 10\,H_{32}P_2'\cos\beta$$

$$+ 6i\,H_{22}P_1'\cos\beta + 15\,H_{33}P_2^2\cos 2\beta\Big)$$

$$- \frac{\omega\mu_0\cos\beta}{K\sin\alpha}\Big(-10\,H_{32}P_2'\sin\beta - 6i\,H_{22}P_1'\sin\beta - 15\,H_{33}P_2^2\sin 2\beta\Big)$$

$$KH(\alpha,\beta) = -\frac{i\varepsilon\sin\beta}{K\sin\alpha}\Big(6i\,P_1'\sin\beta\,\overline{E_{22}} + 10\,\overline{E_{32}}\,P_2'\sin\beta$$

$$+ 15\,\overline{E_{33}}\,P_2^2\sin 2\beta\Big)$$

$$+ \frac{\omega\varepsilon}{K}\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\Big(+5\,\overline{E_{31}}\,P_2 + \overline{E_{31}}\,P_0 + 3i\,\overline{E_{21}}\,P_1 - \overline{E_{11}}\,P_0 + 6i\,\overline{E_{22}}\,P_2'\cos\beta$$

$$+ 10\,\overline{E_{32}}\,P_2'\cos\beta + 15\,\overline{E_{33}}\,P_2^2\cos 2\beta\Big)$$

$$- \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha}\Big(H_{31}P_0 + 5H_{31}P_2 + 3i\,H_{21}P_1 - H_{11}P_0 + 10\,H_{32}P_2'\cos\beta$$

$$+ 6i\,H_{22}P_1'\cos\beta + 15\,H_{33}P_2^2\cos 2\beta\Big)$$

$$- \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}\Big(-10\,H_{32}P_2'\sin\beta - 6i\,H_{22}P_1'\sin\beta - 15\,H_{33}P_2^2\sin 2\beta\Big)$$

$$+ \Big(H_{10}P_0 - 3i\,H_{20}P_1 - 5\,H_{30}P_2 - H_{30}P_0 - 5H_{31}P_2'\cos\beta$$

$$- 3i\,H_{21}P_1'\cos\beta - 5\,H_{32}P_2^2\cos 2\beta\Big)$$

Auch im Rahmen dieses zweiten Beispieles - die primäre Erregung ist in der Luft dargestellt durch:

$$\overrightarrow{\Pi^H} = e^{ikz[\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi)]}\,\vec{n}$$

begnügen wir uns den Streuquerschnitt in einigen Richtungen der Meridianebene y = o oder $\beta = 0, \pi$ auszurechnen.
Für $\beta = 0, \pi$ ist $KF(\cos\alpha, \beta)$ offensichtlich gleich O. Infolgedessen liefert für diese speziellen Richtungen die elektrische Partialwelle keinen Beitrag.
Was die magnetische Partial Welle in der Luft betrifft, können wir nach Anwendung der Fresnelschen Formeln (51) S. 45 und Ersetzung von $\sin\alpha d\alpha$ durch:

$$\frac{\cos\alpha_0}{n^2\cos\alpha}\sin\alpha_0\, d\alpha_0$$

den magnetischen Hertzschen Vektor wie folgt schreiben:

$$\overrightarrow{\Pi g^H} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_W b(\cos\alpha,\beta)\,\frac{2n\cos\alpha\, e^{ik(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)}}{n\cos\alpha + \sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha}} \times \frac{\cos\alpha_0}{n^2\cos\alpha}\, e^{ikr\left[\cos\vartheta\cos\alpha_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\beta_0)\right]} \sin\alpha_0\, d\alpha_0\, d\beta_0\,\vec{n}$$

Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf die Größe

$$G_f(\cos\alpha_0,\beta) = b(\cos\alpha,\beta)\,\frac{2n\cos\alpha\, e^{ik(K\cos\alpha - K_0\cos\alpha_0)}}{n\cos\alpha + \sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha}}\,\frac{\cos\alpha_0}{n^2\cos\alpha}$$

Diese $G_f(\cos\alpha_0,\beta)$ setzt man in die zweite Gleichung (73 a) ein, um den Streuquerschnitt zu ermitteln. Es besteht natürlich die Beziehung $\sin\alpha_0 = n\sin\alpha$ und

$$\sigma = \frac{1}{K_0^2} \frac{\sin^2\alpha_0}{\sin^2\theta_1} \left| G(\cos\alpha, \beta) \right|^2$$

Nach kurzen Umrechnungen und unter Berücksichtigung, daß

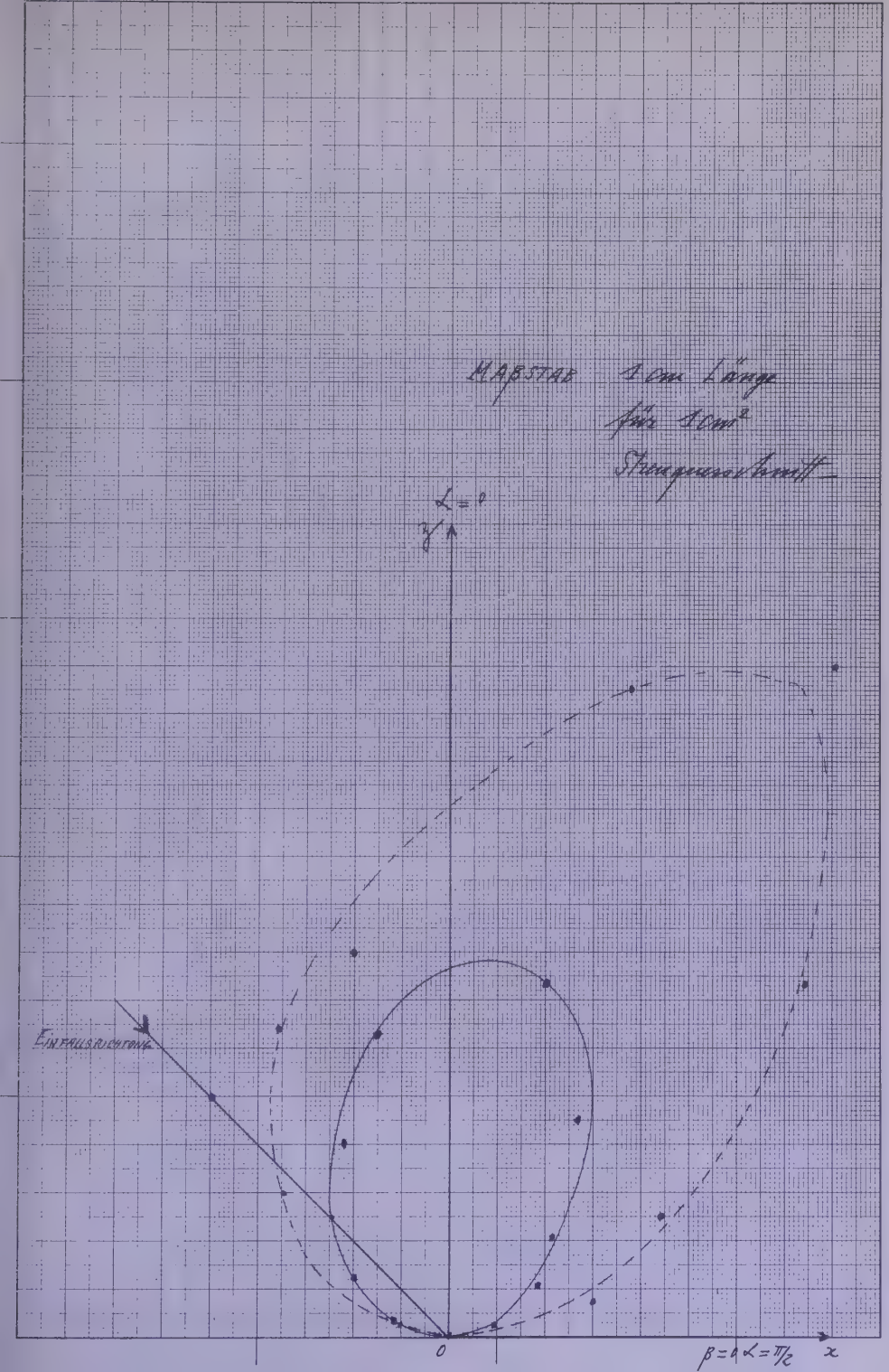
$$\sin^2\theta_1 = \frac{1}{2} \quad n = 2 \quad K_0^2 = 4\pi^2$$

erhält man:

$$\sigma = \frac{2}{\pi^2} \frac{\cos^2\alpha_0 \sin^2\alpha}{(\cos\alpha_0 + 2\cos\alpha)^2} \left| G(\cos\alpha, \beta) \right|^2$$

α_0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\frac{2}{\pi^2}\frac{\cos^2\alpha_0\sin^2\alpha}{(\cos\alpha_0+2\cos\alpha)^2}$	$3{,}65\cdot10^{-4}$	$12{,}1\cdot10^{-4}$	$19\cdot10^{-4}$	$17{,}55\cdot10^{-4}$	$7{,}92\cdot10^{-4}$	0
$\left\|G(\cos\alpha,0)\right\|^2$	7,59	2,66	1,09	0,581	0,294	
$\left\|G(\cos\alpha,\pi)\right\|^2$	4,45	1,2	0,741	0,453	0,244	
$\sigma \frac{\beta=0}{cm^2}$	27,7	32,2	20,7	10,1	6,3	0
$\sigma \frac{\beta=\pi}{cm^2}$	16,2	14,5	14,1	8,1	1,9	0

Wir haben die beiden Charakteristiken entsprechend unseren zwei Beispielen in einer einzigen Abbildung gezeichnet. [illegible] ersten Beispiel (einfallende ebene Welle $\vec{E} = e^{ikr[\;]}\vec{n}$) wurde die Kurve durchgezeichnet. Beim zweiten Beispiel wurde sie gestrichelt.


MAßSTAB 1 cm Länge
für 1 Ohm²
Flächenwiderstand
y
α = 0
EINFALLSRICHTUNG
0
β = 0 α = π/2
x

Literaturverzeichnis

[1] J. Lense,
Kugelfunktionen
Akademische Verlagsgemeinschaft Geest u. Portig KG.
Leipzig 1954

[2] G.N. Watson
Besselfunktionen Bd. I und II
Cambridge University Press, 1922

[3] A. Sommerfeld
Vorlesungen über theoretische Physik Bd. 6
Partielle Differentialgleichungen der Physik
Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig KG.
Leipzig 1962

[4] A. Angot
Compléments de Mathematiques
Editions de la revue d'Optique, Paris 1957

[5] G. Goudet
Electricité
Masson et Cgnie Editeurs Paris 1956

[6] A. Sommerfeld
Vorlesungen über theoretische Physik Bd. 4
Optik
Akademische Verlagsgemeinschaft Geest u. Portig KG.
Leipzig 1959

[7] J.A. Stratton
Electromagnetic Theory
Mc Graw Hill Book Company
New York and London 1941

[8] D.S. Jones
The Theory of electromagnetissm
Pergamon Press Oxford London New York Paris 1964

[9] W.Franz
Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen
Ergebnisse der Angewandten Mathematik
Springer 1957

[1o] Hönl Maue Westphal
Theorie der Beugung
Encyclopedia of Physics Vol. XXV/1
Springer 1961

[11] G. Mie
Beiträge zur Optik trüber Medien speziell kolloidaler Metallösungen
Ann. der Phys. 25, 377 ,(19o8)

[12] P. Debye
Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material
Ann. d. Phys. 3o, 57 (19o9)

[13] T.J. Bromwich
Philosophical Magazin 38, 143 (1919)

[14] H. Weyl
Ausbreitung electromagnetischer Wellen über einen ebenen Leiter
Ann. d. Phys. 6o, 481 (1919)

[15] W. Trinks
Zur Vielfachstreuung an kleinen Kugeln
Ann. d. Phys. 22, 561 (1935)

[16] William W. Hansen
A new type of Expansion in Radiation problems
Phys. Rev. 47, 139 (1935)

[17] William W. Hansen
Transformations usefull in certain Antenne calculations
J. Applied Phys. 8, 284 (1937)

[18] Cl. Müller
Das allgemeine Beugungsproblem und die Separation der Maxwellschen Gleichungen nach Bromwich
Abh. Math. Sem. Hamburg 16, 95 (1949).

Lebenslauf

Am 11. 6. 1937	wurde ich, Jean Wiedemann, in Paris geboren
1948 - 1950	Volksschule in Vaison
1950 - 1956	College St. Croix de Neuilly Lycée Janson de Sailly in Paris
Juli 1956	Baccalauréat
1956-1961	Sorbonne
1961 - 1962	Grenoble Faculté des Sciences
Juli 1962	Licence-es-Sciences
1962 - 1964	Militärdienst
Sommersemester 1964	Erste Immatrikulation in Saarbrücken
Sommersemester 1965	Anfang der Promotion

ROTAPRINT-
OFFSET-
DRUCKEREI
Klein
6602 DUDWEILER Scheidter Straße 26
Tel. Sulzbach 7 32 84
IHR LIEFERANT FÜR DRUCKSACHEN ALLER ART